Volume

2

RESUME DE COURS DE MATHEMATIQUES.

Troisième

Programme 1999

introduction :

Ce résumé, second du nom, a été conçu en tant qu'assistant pour les élèves de quatrième et de troisième. Il regroupe les notions principales qui doivent être sues pour le brevet des collèges. Il ne doit pas cependant être utilisé à titre de cours proprement dit (car rien ne remplace le cours que fait un professeur titularisé), mais bien en tant qu'aide mémoire. On trouvera essentiellement son utilité pour se rappeler certaines notions fondamentales, pour réviser avant un devoir...

Il est de mon devoir de vous informer que ce résumé de cours est susceptible de manquer de propriétés essentielles, et peut même comporter quelques erreurs, bien que ce que vous lisez est souvent remis à jour. Etant donné que je me suis basé sur les cours particuliers que je donne et sur les exercices fournis dans des livres, il est éventuellement possible que certaines parties du programme que j'ai abordé soient trop ou pas assez détaillées.

Si vous remarquez des erreurs, veuillez me contacter pour une correction en ligne immédiate (les versions remises à jour sont disponibles sur le site internet). Pour ce qui est de la compatibilité des fichiers téléchargés sur le site, si vous avez la version au format ".doc" et qu'il apparaît certains bugs, téléchargez la version au format ".pdf" que vous pourrez visionner avec le programme gratuit acrobat reader (l'adresse pour télécharger ce logiciel se trouve sur le site), ce que je vous recommande vivement.

Le résumé de cours que je vous propose est construit en trois chapitres distincts. Consultez le sommaire (page suivante) pour en connaître les contenus. La majeure partie du programme est abordé (tout du moins toutes les notions indispensables).

Enfin, ce résumé est libre d'être distribué, à condition qu'il le soit intégralement et sans modification (vous pouvez le vérifier en ligne sur le site web). Vous avez de plus l'obligation morale d'adresser un petit e-mail à son auteur (autrement dit moi) qui en sera ravi, ce qui vous permettra de plus d'être averti en cas de détection d'erreur(s) sur le présent document et de le faire évoluer par vos remarques et conseils. Voyez le paragraphe suivant pour cela.

Comment me contacter :

Adresse du site web : http://www.bennet.fr.st
Adresse électronique : ferrand.benoit@libertysurf.fr

Remerciements :

◊ A tous les élèves à qui j'ai donné des cours et qui m'ont permis de cerner les problèmes majeurs rencontrés au cours de la scolarité de troisième...

Sommaire :

GEOMETRIE

CHAPITRE

1

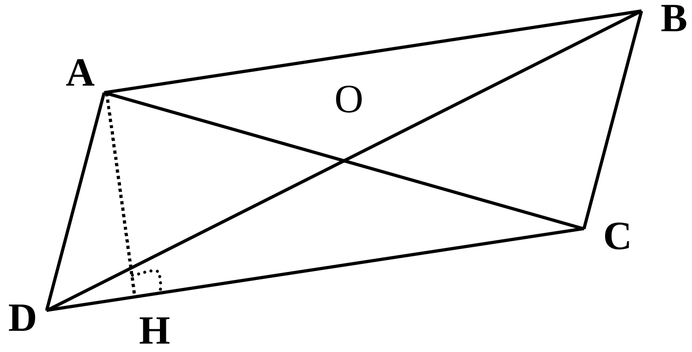
I. PROPRIETES DE QUELQUES QUADRILATERES COURANTS.

Vous trouverez ci-dessous toutes les définitions & propriétés des quadrilatères courants. Notons que les propriétés énoncées pour chaque quadrilatère particulier sont classées par ordre d'importance.

a) Parallélogramme.

Définition :

Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont deux à deux parallèles.



ABCD est un parallélogramme, AH une de ses 4 hauteurs.

Aire :
A = DC.AH

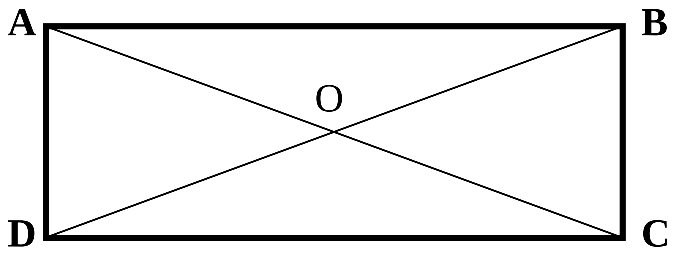
Propriétés :

- Les côtés opposés d'un parallélogramme sont deux à deux parallèles et de même longueurs ;
- Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leurs milieux ;
- Les angles opposés d'un parallélogramme ont même mesure.

b) Rectangle.

Définition :

Un rectangle est un parallélogramme particulier avec un angle droit.



ABCD est un rectangle.

Aire :
A = AB.BC

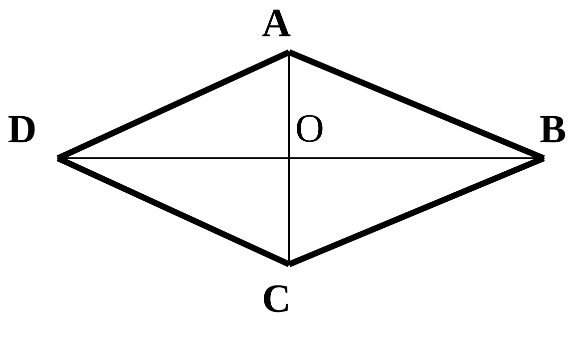
Propriétés :

- Les côtés opposés d'un rectangle sont deux à deux parallèles et de même longueurs ;
- Un rectangle a quatre angles droits ;
- Les diagonales d'un rectangle ont même longueurs et se coupent en leur milieux.

c) Losange.

Définition :

Un losange est un parallélogramme particulier avec quatre côtés de même longueur.



ABCD est un losange.

Aire :
A = AC.BD

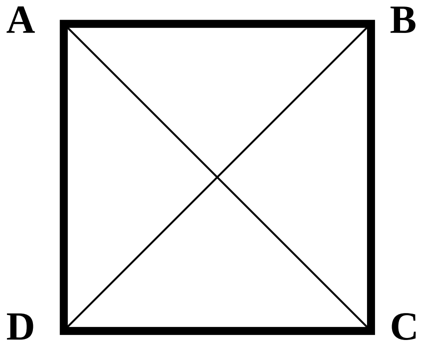
Propriétés :

- Les côtés opposés d'un losange sont deux à deux parallèles et de même longueurs ;
- Les quatre côtés d'un losange sont de même longueurs ;
- Les diagonales d'un losange se coupent en leurs milieux et perpendiculairement ;
- Les angles opposés d'un losange ont même mesure.

d) Carré.

Définition :

Un carré est un losange particulier avec un angle droit, ou un rectangle particulier avec deux côtés consécutifs de même longueur…



ABCD est un carré.

Aire :
A = AB.BC

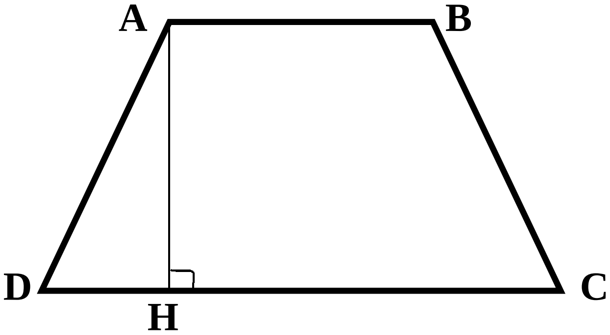
Propriétés :

- Les cotés opposés d'un carré sont deux à deux parallèles et de même longueurs ;
- Les quatre côtés d'un carré sont de même longueurs ;
- Les quatre angles d'un carré sont des angles droits ;
- Les diagonales d'un carré ont même longueurs, et se coupent en leurs milieux et perpendiculairement.

e) Trapèze.

Définition :

Un trapèze est un quadrilatère avec deux côtés parallèles.



ABCD est un trapèze. AH est une de ses quatre hauteurs

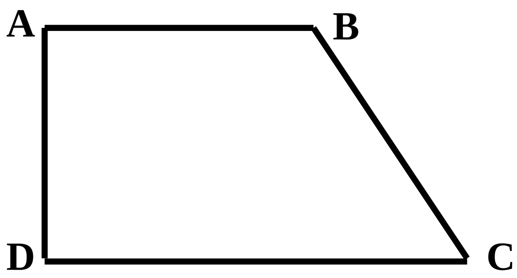
Aire :

$$A = \frac{(AB+DC).AH}{2}$$

<u>Propriété :</u>

- Un trapèze a deux côtés parallèles.

<u>Cas particulier :</u> trapèze rectangle.



Un trapèze rectangle est un trapèze avec deux angles droit.

Aire :

$$A = \frac{(AB+DC).AD}{2}$$

II. PROPRIETES DE TRIANGLES.

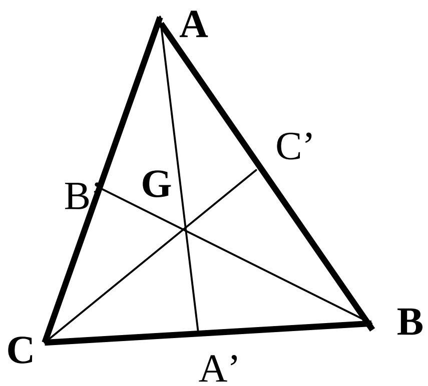
a) Droites particulières d'un triangle.

On dénombre dans un triangle quatre droites particulières : deux d'entres elles sont spécifiques aux triangles (médianes et hauteurs), et les deux autres (médiatrices et bissectrices), bien que leurs définitions ne s'appuient pas sur les triangles, ont des propriétés intéressantes… Commençons par les médianes.

- **Les médianes :**

Définition :

Une médiane d'un triangle est une droite qui passe par un sommet et qui coupe le côté opposé en son milieu.



- AB' = B'C
- AC' = C'B
- BA' = A'C

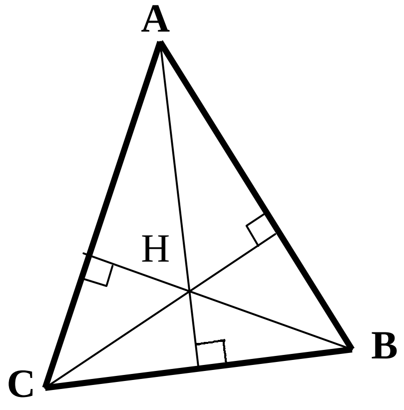
Propriétés :
Les trois médianes d'un triangle se coupent en un seul point G : le centre de gravité.
Le centre de gravité est situé aux 2/3 de chaque médiane :

$$AG = \frac{2}{3} AA' \; ; \; BG = \frac{2}{3} BB' \; ; \; CG = \frac{2}{3} CC'$$

- **Les hauteurs :**

Définition :

Une hauteur d'un triangle est une droite qui passe par un sommet et qui coupe perpendiculairement le côté opposé.



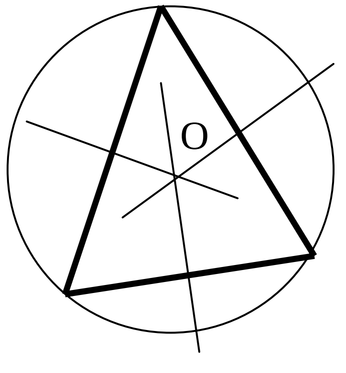
- (AH) $\perp$ (BC)
- (BH) $\perp$ (AC)
- (CH) $\perp$ (AB)

Propriété :
Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point H : l'orthocentre.

- **Les médiatrices :**

Définition :

Une médiatrice est une droite qui coupe un segment perpendiculairement et en son milieu.



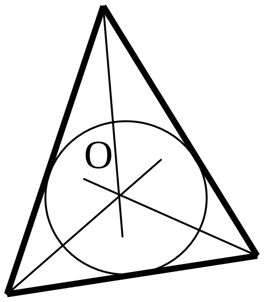
Remarque : une médiatrice est définie par rapport à un segment, et n'est ainsi pas spécifique à un triangle.

Propriété :
Dans un triangle, les trois médiatrices sont concourantes en un point O : le centre du cercle circonscrit.

- **Les bissectrices :**

Définition :

Une bissectrice est une droite qui coupe un angle en deux angles de même mesure.



Remarque : une bissectrice est définie par rapport à un angle, et n'est ainsi pas spécifique à un triangle.

Propriété :
Dans un triangle, les trois bissectrices sont concourantes en un point O : le centre du cercle inscrit.

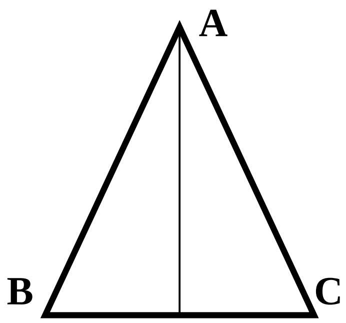
b) Triangles particuliers.

On dénombre 3 types de triangles particuliers : les triangles isocèles, équilatéraux et rectangles.

- **Les triangles isocèles :**

Définition :

Un triangle isocèle est un triangle avec deux côtés égaux.



ABC est un triangle isocèle en A, c'est-à-dire : AB = AC.

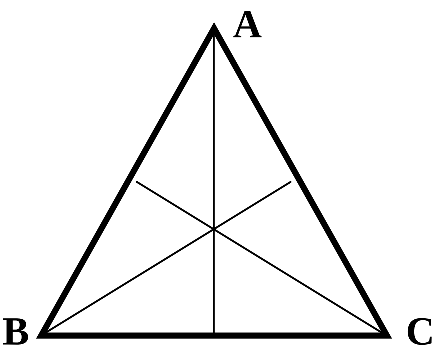
Propriétés :

- La hauteur issue du sommet principal est également médiane, bissectrice de l'angle et médiatrice du côté opposé. Cette hauteur est également axe de symétrie du triangle.
- Les angles à la base ont le même mesure.

- **Les triangles équilatéraux :**

Définition :

Un triangle équilatéral est un triangle avec ses trois côtés égaux.



ABC est un triangle équilatéral, c'est-à-dire :
AB = AC = BC.

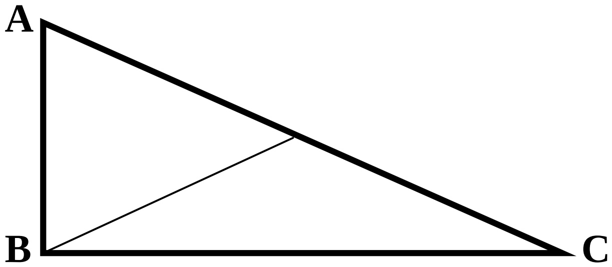
Propriétés :

- Les trois hauteurs d'un triangle équilatéral sont également des médianes, des bissectrices de chaque angle et des médiatrices. Ces droites sont également des axes de symétrie du triangle.
- Les trois angles d'un triangle équilatéral font 60°.

- **Les triangles rectangles :**

Définition :

Un triangle rectangle est un triangle avec un angle droit.



ABC est un triangle rectangle en B :
ABC = 90°

Propriétés :

- Dans un triangle rectangle, la somme des angles « non droits » est égale à 90°.
- Dans un triangle rectangle, la médiane issue de l'angle droit a pour longueur la moitié de l'hypothénuse (qui est le côté le plus long, opposé à l'angle droit).
- Le centre du cercle circonscrit d'un triangle rectangle est situé au milieu de l'hypothénuse.
- Conséquence : si [AC] est un diamètre d'un cercle, alors pour tout point B placé sur ce cercle (avec B différent de A et B), ABC est un triangle rectangle en B.
- Voir le théorème de Pythagore (page 10).

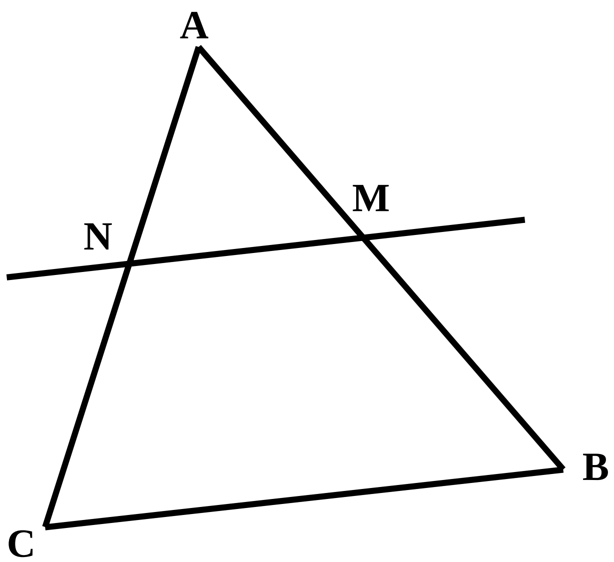
III. THEOREMES IMPORTANTS, TRIGONOMETRIE.

a) Théorème de Thalès.

Th. de Thalès :

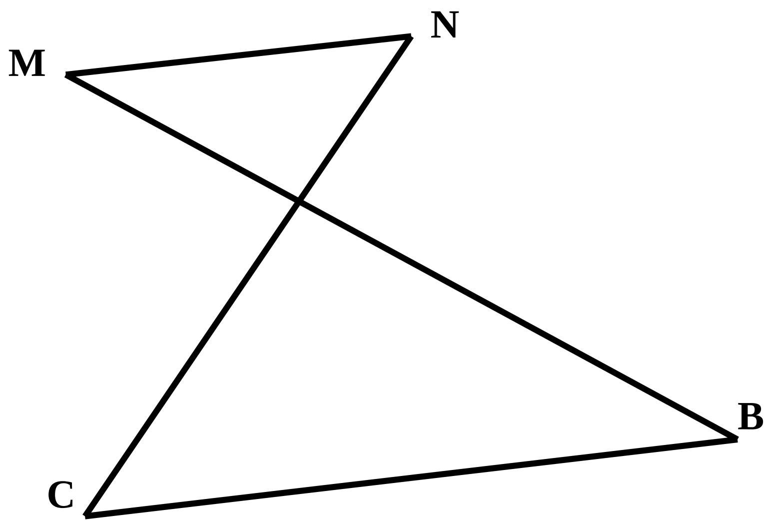
Dans un triangle, si une droite est parallèle à un coté, alors elle forme deux triangles dont les cotés sont proportionnels.

Autrement dit, avec les notations de la figure suivante, on a : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ **.**



La droite (MN) est parallèle à la droite (BC). DONC on peut appliquer le théorème de Thalès.

Remarque : la configuration du dessin ci-dessus n'est pas unique ! En effet, la droite qui est parallèle à un côté ne passe pas obligatoirement dans le triangle… Le cas échéant, on parle d'une *configuration croisée* :



La droite (MN) est parallèle à la droite (BC).

On a toujours :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Voyons à présent un cas particulier important : lorsque la droite parallèle à un côté passe par les milieux des deux autres côtés du triangle.

Corollaire : Droite des milieux :

- **Dans un triangle, si une droite est parallèle à un coté et passe par le milieu d'un autre côté, alors elle coupe le troisième côté en son milieu.**
- **Dans un triangle, si une droite passe par les milieux de deux côtés, alors elle est parallèle au troisième côté.**

Dém : Pour démontrer ces propriétés, il suffit d'appliquer le théorème de Thalès, et des rapports de ½ apparaissent alors.

Exercice :

Soient MNP un triangle tel que MN = 8 cm et MP = 7 cm., E le point situé sur [MP] tel que ME = 3 cm.

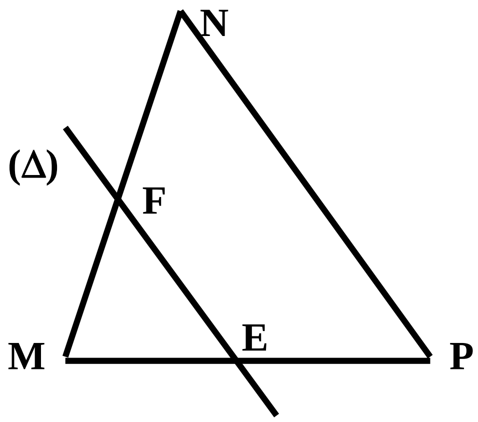
1_ Traçer la droite (Δ) parallèle à NP et passant par E.

On note F le point d'intersection de (Δ) avec (MN).

2_ Quelle est la longueur du segment [FN] ?

Solution :

Rq : Avant toute chose, allez voir les points « méthode » !



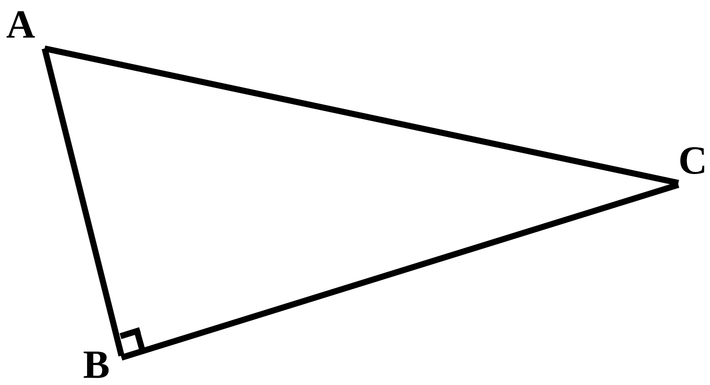
- **MN = 8 cm.**
- **MP = 7 cm.**
- **ME = 3 cm.**
- **(Δ) parallèle à (NP).**

(EF) est parallèle à (PN), donc nous pouvons appliquer le théorème de Thalès :
$\frac{MF}{MN} = \frac{ME}{MP} = \frac{EF}{NP}$, et on obtient donc :
$\frac{MF}{8} = \frac{3}{7} = \frac{EF}{NP}$, d'où :
$\frac{MF}{8} = \frac{3}{7}$, ce qui donne : $MF = \frac{3*8}{7}$.
De plus, nous savons que MN = MF+FN (car M, F et N sont alignés), d'où :
FN = MN – MF, soit :
FN = 8 – $\frac{3*8}{7} = \frac{8*7}{7} - \frac{3*8}{7} = \frac{56-24}{7} = \frac{32}{7}$.
Finalement, <u>FN = 32/7 cm</u>., soit <u>FN ≈ 4.57 cm</u>.

b) <u>Théorème de Pythagore.</u>

<u>Th. de Pythagore :</u>

Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypothénuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés du triangle.
Autrement dit, avec les notations de la figure suivante :
$AC^2 = AB^2 + BC^2$



ABC est un triangle rectangle en B

Remarque : le théorème de Pythagore trouve essentiellement son utilité lorsque l'on connaît la longueur de deux côtés d'un triangle rectangle et que l'on cherche et que l'on cherche la longueur du troisième.

Notons que la réciproque du théorème de Pythagore est aussi très importante : elle permet de montrer qu'un triangle est rectangle.

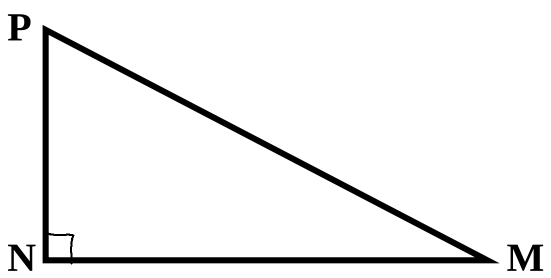
Réciproque du th. de Pythagore :

Dans un triangle, si le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle, et le plus grand côté est alors l'hypothénuse.

Exercice 1 :

Soit MNP un triangle rectangle en N tel que MN = 4 cm. et MP = 6 cm. Quelle est la longueur du segment [NP] ?

Solution :



MNP est un triangle rectangle en N.
- **MN = 4 cm**
- **MP = 6 cm**

MNP est un triangle rectangle en N. Nous pouvons donc appliquer le théorème de Pythagore :
$MN^2 + NP^2 = MP^2$, soit :
$4^2 + NP^2 = 6^2$
$NP^2 = 36 - 16$
$NP^2 = 20$
NP = $2\sqrt{5}$
Finalement, $\underline{NP = 2\sqrt{5}}$, soit NP ≈ 7 cm.

Exercice 2 :

Soit ABC un triangle tel que AB = 5, AC = 3 et BC = 4. Montrer que le triangle ABC est rectangle.

Solution :

D’après la réciproque du théorème de Pythagore, si on a $AC^2 + BC^2 = AB^2$, alors le triangle ABC sera rectangle en C (AB est alors l’hypothénuse).
Calculons les deux termes de cette expression :
$AC^2 + BC^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$
$AB^2 = 5^2 = 25$
Par conséquent, $\underline{AC^2 + BC^2 = AB^2}$, et donc ABC est un triangle rectangle en C.

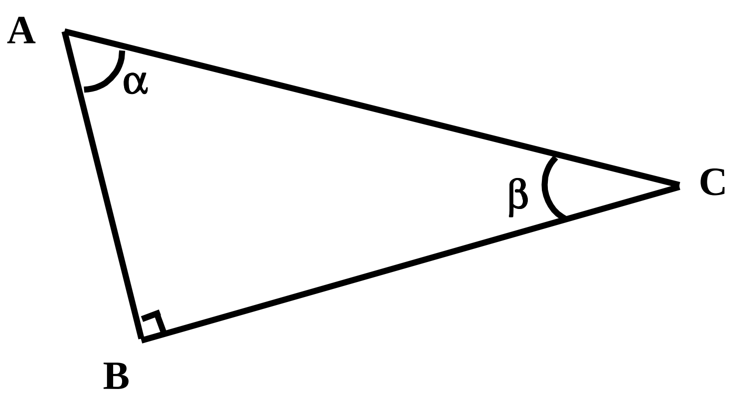
c) Trigonométrie.

La trigonométrie consiste en l’utilisation de fonctions qui relient les angles d’un triangle rectangle et les côtés de celui-ci. Il est important d’insister sur le faît que l’on ne peut pas se servir de la trigonométrie dans un triangle autre qu’un triangle rectangle !

Définissons ces fonctions. Elles sont au nombre de trois, mais seules deux d’entre elles sont le plus souvent employées (mais la troisième n’est tout de même pas à négliger !).

Soient (ABC) un triangle rectangle en B et α l’angle (BAC).
On note :

$$\cos(\alpha) = \frac{AB}{AC} \quad ; \quad \sin(\alpha) = \frac{BC}{AC} \quad ; \quad \tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{BC}{AB}$$



ABC est un triangle rectangle en B

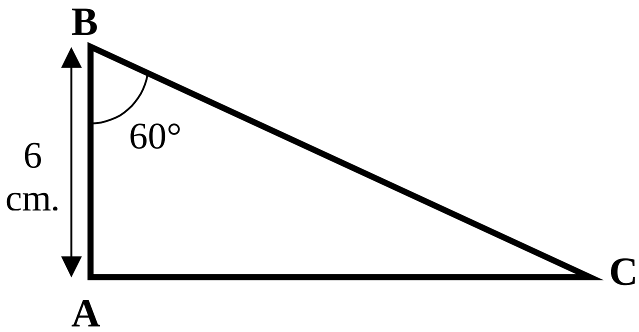
Remarques :

- Ces fonctions ne trouvent un interêt qu’aux angles qui ne sont pas droits ! Ainsi, on ne se servira des fonctions trigonométriques uniquement pour les angles α et β.
- Par ailleurs, ces fonctions sont très pratiques lorsque l’on cherche la valeur d’un angle connaissant les longueurs d’au moins deux côtés et réciproquement…

Exercice 1 :

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que ABC = 60° et AB = 6 cm. Calculer la longueur de l’hypothénuse.

Solution :



Nous savons que <u>cos (ABC) = AB/BC</u>. On obtient :

cos (60°) = $\frac{6}{BC}$.

A la calculatrice, on trouve : cos (60°) = 0.5, d'où :

0.5 = $\frac{6}{BC}$ soit :

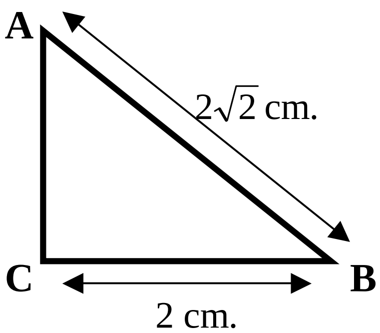
BC = $\frac{6}{0.5}$ = 12.

Finalement, <u>BC = 12 cm</u>.

<u>Exercice 2 :</u>

Soit ABC un triangle rectangle en C tel que AC = 2 et AB = 2.racine 2 cm. Montrer que le triangle est également isocèle par la trigonométrie.

<u>Solution :</u>



Nous savons que sin (CAB) = BC/AB, d'où :

sin (CAB) = $2\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, et à la calculatrice, on trouve que : $\sin^{-1}$ ($\frac{\sqrt{2}}{2}$) = 45°.

Donc <u>CAB = 45°</u>

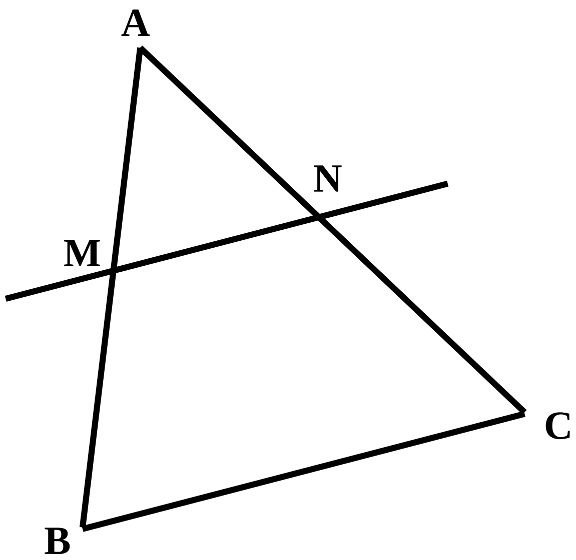
Or, dans un triangle rectangle, la somme des deux angles non droits est égale à 90°, d'où : 45 + ABC = 90, soit <u>ABC = 45°</u>

Finalement, <u>CAB = ABC</u>, et donc <u>le triangle rectangle ABC est également isocèle de sommet principal C</u>.

d) Résumé et méthodes.

Très souvent, la résolution de problèmes géométriques passe par l'application des théorèmes de Thalès ou de Pythagore ou encore par l'utilisation de fonctions trigonométriques. Il est donc primordial de savoir parfaitement ces derniers, ainsi que de pouvoir les appliquer sans perte de temps. Pour cela, il vous faut repérer dans les énoncés des indices essentiels, qui sont : *droites parallèles* et/ou *triangle rectangle*.

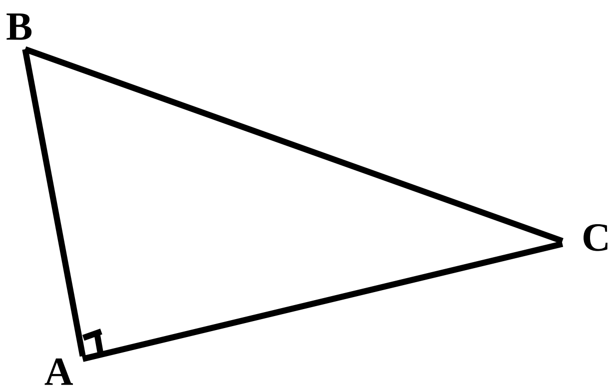
En présence de droites parallèles, repérez tous les triangles auxquels il est possible d'appliquer le théorème de Thalès (attention aux configurations croisées !).



(MN) parallèle à (BC), donc :

AM/AB = AN/AC = MN/BC

En présence d'un triangle rectangle, deux possibilités s'offrent à vous. Si vous ne connaissez que des longueurs de côtés et que l'on vous demande une longueur, il vous faudra probablement utiliser le théorème de Pythagore :



ABC est un triangle rectangle en A, donc :

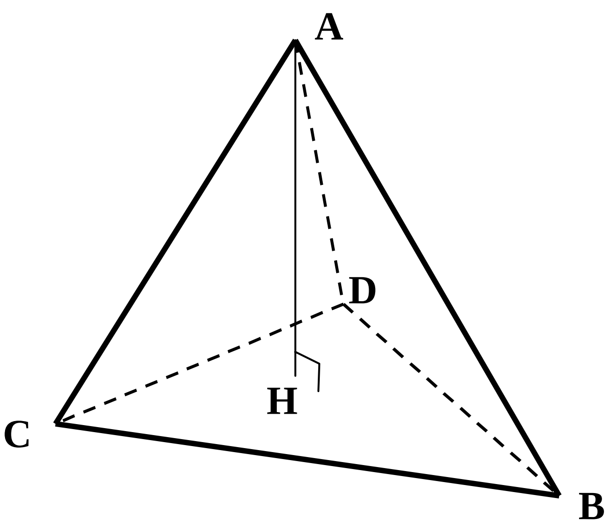
$AB^2 + AC^2 = BC^2$

Cependant, toujours dans un triangle rectangle, si on vous demande un angle ou bien si on vous demande une longueur et que vous connaissez un angle (autre que l'angle droit), alors appliquez les fonction de trigonométrie (référez-vous quelques pages plus haut pour les formules).

IV. VOLUME.

Vous allez trouver ci-dessous des formules pour calculer des volumes. Il est important de ne pas oublier le faît que même si une seule formule est écrite pour une figure, il n'en reste pas moins que souvent, l'application de cette formule se fait sous plusieurs cas (exemple pour une aire : trois manières sont possibles pour le calcul de l'aire d'un triangle).

- **Volume d'une pyramide.**



Volume d'une pyramide :

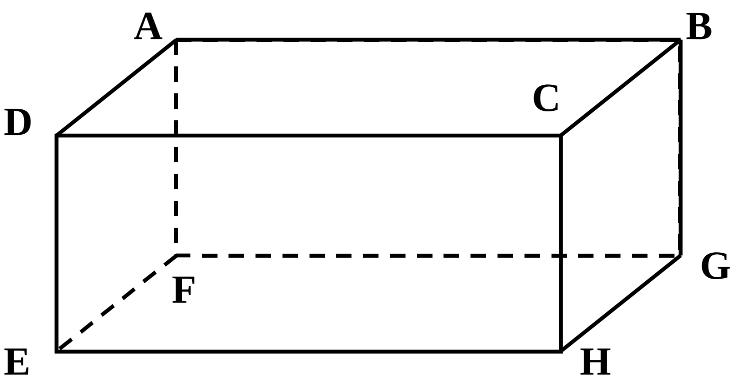
$$V = \frac{(\text{Aire de la base}).\text{Hauteur}}{3}$$

Ici :

$$V = \frac{A_{BCD}\,.\,AH}{3}$$ **, où**

A_{BCD} est l'aire du triangle BCD.

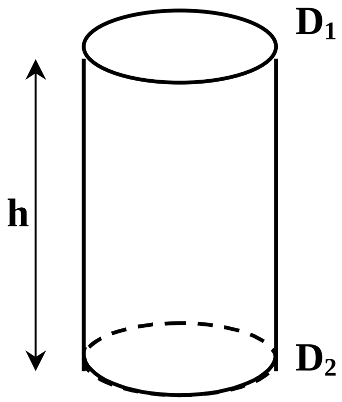
- **Volume d'un parallélépipède.**



Toutes les faces sont des parallélogrammes. Volume d'un parallélépipède :
V = (Aire de la base).Hauteur

Ici :
V = AB.AD.AF

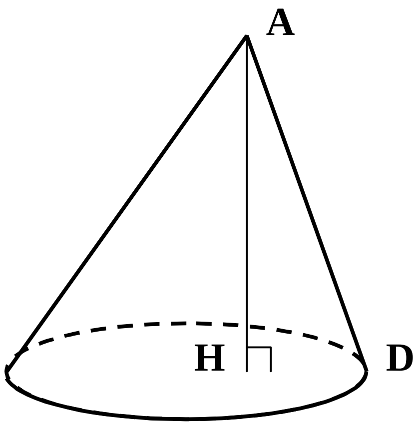
- **Volume d'un cylindre.**



Les deux bases (D_1 et D_2) sont des disques identiques.
Volume d'un cylindre :
V = (Aire de la base).Hauteur

Ici :
V = (Aire d'un disque).h

- **Volume d'un cône.**



La base (D) est un disque.
Volume d'un cône :

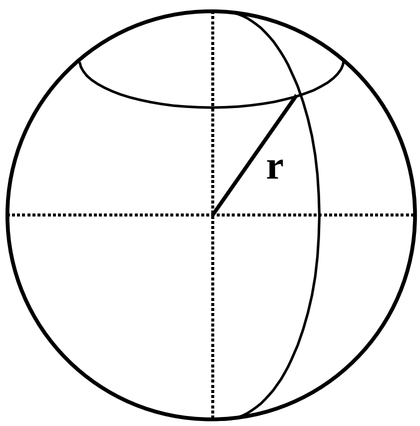
$$V = \frac{(\text{Aire de la base}).\text{Hauteur}}{3}$$

Ici :

$$V = \frac{A_D . AH}{3} \text{, où}$$

A_D est l'aire du disque D.

- **Volume d'une sphère (peu important en troisième).**



Volume d'une sphère :

$$V = \frac{4}{3} . \pi . r^3$$