Volume

1

RESUME DE COURS DE MATHEMATIQUES.

Terminale S

Programme 1998

introduction :

Ce résumé, premier du nom, a été conçu en tant qu'assistant pour les élèves de terminale S. Il regroupe les notions principales qui doivent être sues en enseignement obligatoire (la spécialité maths ne sera pas abordé dans ce volume). Il ne doit pas cependant être utilisé à titre de cours proprement dit (car rien ne remplace le cours que fait un professeur titularisé), mais bien en tant qu'aide mémoire. On trouvera essentiellement son utilité pour se rappeler certaines notions fondamentales, pour réviser avant un devoir…

Il est de mon devoir de vous informer que ce résumé de cours est susceptible de manquer de propriétés essentielles, et peut même comporter quelques erreurs, bien que ce que vous lisez est souvent remis à jour. Etant donné que je me suis basé sur des extraits de programme édités sur un livre de mathématiques série S, il est éventuellement possible que certaines parties du programme que j'ai abordé soient trop ou pas assez détaillées.

Ce programme est celui entré en vigueur en septembre 1998, et devrait être d'actualité jusqu'au bac 2001. Si, toutefois, vous remarquez des erreurs, veuillez me contacter pour une correction en ligne immédiate (les versions remises à jour sont disponibles sur le site internet). Pour ce qui est de la compatibilité des fichiers téléchargés sur le site, si vous avez la version au format ".doc" et qu'il apparaît certains bugs, téléchargez la version au format ".pdf" que vous pourrez visionner avec le programme gratuit acrobat reader (l'adresse pour télécharger ce logiciel se trouve sur le site), ce que je vous recommande vivement.

Le résumé de cours que je vous propose est construit en trois chapitres distincts. Consultez le sommaire (page suivante) pour en connaître les contenus. Tout le programme en obligatoire est abordé.

Enfin, ce résumé est libre d'être distribué, à condition qu'il le soit intégralement et sans modification (vous pouvez le vérifier en ligne sur le site web). Vous avez de plus l'obligation morale d'adresser un petit e-mail à son auteur (autrement dit moi) qui en sera ravi, ce qui vous permettra de plus d'être averti en cas de détection d'erreur(s) sur le présent document et de le faire évoluer par vos remarques et conseils. Voyez le paragraphe suivant pour cela.

Comment me contacter :

Adresse du site web : http://www.chez.com/ptitben2000
Adresse électronique : ferrand.benoit@libertysurf.fr

Remerciements :

◊ Jenny pour son aide précieuse (sans quoi il m'aurait été difficile de faire ce résumé ☺).

◊ SpaceFred dont le site est excellent (http://perso.wanadoo.fr/f.mangeard) pour ceux qui s'intéressent à l'astronomie et aux maths (jusqu'à l'agrégation !!!).

◊ Mes profs de sup et spé de Reims et leurs enseignements dictatoriaux qui m'ont permis d'intégrer l'ESSI (école d'ingénieur en info à Sophia-Antipolis, proche d'Antibes).

◊ La série des *ABC du Bac* où j'ai parfois puisé mon inspiration.

Sommaire :

ANALYSE

Chapitre

1

I. Fonctions numériques: étude locale et globale.

A. Enoncés sur les limites.

Les limites données dans ce paragraphe sont pour la plupart issues de théorèmes de comparaison sur les fonctions, c'est-à-dire que connaissant une relation de comparaison entre celles-ci, que ce soit en $+\infty$ ou $-\infty$, ainsi que la limite de l'une d'entre elles, si les hypothèses sont vérifiées, on peut en déduire la limite de l'autre.

Propriété :

soit $A \in \Re$, f et u deux fonctions à valeurs dans $\Re$.

Si, $\begin{cases} \text{pour tout } x \geq A, f(x) \geq u(x) \\ \lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = +\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

On peut alors donner l'équivalent de cet énoncé dans le cas d'une limite en $-\infty$:

Si, $\begin{cases} \text{pour tout } x \geq A, f(x) \geq u(x) \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = -\infty$

Nous pouvons de même donner ces propriétés dans le cas où $x \to -\infty$ …

Graphiquement, on pourrait traduire ces propriétés par :

- *dans le premier cas* - > la courbe représentative de f est au dessus de C_u qui tend vers $+\infty$;
- *dans le second cas* - > la courbe représentative de u est en dessous de C_f qui tend vers $-\infty$.

Nous pouvons également donner des propriétés dans le cas de limites finies :

<u>Propriété :</u>

Soient f et u deux fonctions à valeur dans $\Re$, A et L deux réels.

Si, $\begin{cases} \text{pour tout } x \geq A, |f(x)\text{-}L| \leq u(x) \\ \lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = 0 \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$

Les hypothèses de cette propriété signifient en fait que l'écart entre la fonction f et L diminue au fur et à mesure que x augmente jusqu'à ce que cet écart s'annule ($u(x) \to 0$). Ainsi, la fonction f se rapproche infiniment du réel L : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$.

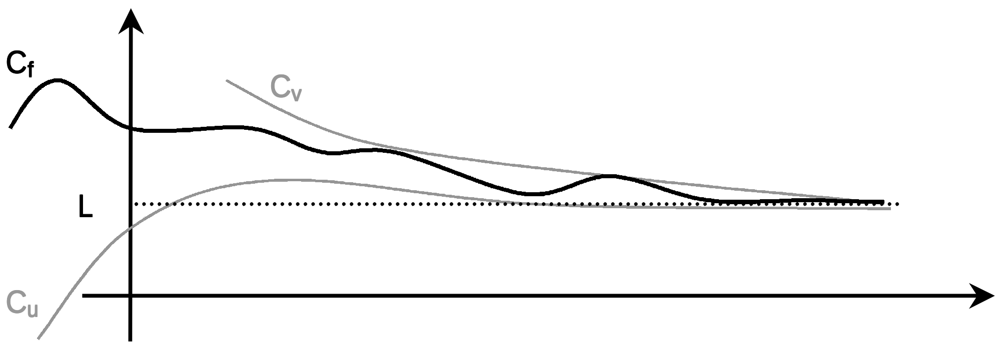
Nous pouvons à présent donner le *théorème des gendarmes* :

<u>Théorème :</u>

Soient f, u et v trois fonctions à valeurs dans $\Re$, A et L deux réels.

Si, $\begin{cases} \text{Pour tout } x \geq A, u(x) \leq f(x) \leq v(x) \\ \lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = L \\ \lim\limits_{x \to +\infty} v(x) = L \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$

Ce théorème est également appelé le "théorème d'encadrement". En effet, on encadre une fonction f par deux fonctions u et v qui tendent vers la même limite en $+\infty$.



La propriété suivante n'a pas une très grande utilité pour la résolution d'exercices ou de problèmes. Cependant, elle contient une subtilité qui mérite réflexion. Par conséquent, elle peut constituer pour le jury une question idéale pour tester votre pertinence et votre compréhension…

<u>Propriété :</u>

Soient f et g deux fonctions à valeurs dans $\Re$, A, L et L' trois réels.

$$\text{Si, } \begin{cases} \text{Pour tout } x \geq A, f(x) \leq g(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = L' \end{cases} \quad \text{alors } L \leq L'$$

La subtilité évoquée réside dans le fait que la propriété reste vraie si on remplace $f(x) \leq g(x)$ par l'inégalité stricte $f(x) < g(x)$, mais elle devient fausse si on ajoute à cette transformation : $L < L'$.
En effet, **<u>lorsque l'on passe aux limites, les inégalités deviennent toujours larges !</u>**

<u>Exemple</u>: soient f : $\begin{bmatrix} \Re^* \to \Re \\ x \mapsto 1 - \frac{1}{2x} \end{bmatrix}$, et g : $\begin{bmatrix} \Re^* \to \Re \\ x \mapsto 1 + \frac{1}{2x} \end{bmatrix}$.

Pour tout $x > 0$, on a $f(x) < g(x)$. De plus, avec les notations de la propriété, $L = 1$ et $L' = 1$, d'où $L = L'$!

Enfin, il reste le cas des limites pour une composition de fonction :

<u>Théorème :</u>

Soient $(a,b,c) \in \overline{\Re}^3$ (c'est-à-dire que a, b et c peuvent être soit des réels finis, soit valoir $+$ ou $-\infty$) , f et g deux fonctions à valeurs dans $\Re$, avec f définie au voisinage de a et g définie au voisinage de b.

$$\text{Si, } \begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) = b \\ \lim\limits_{x\to b} g(x) = c \end{cases} \quad \text{alors } \lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = c$$

Ce résultat est donc une composition de fonction dans le cas d'une limite. On peut aussi écrire (dans le cas où a, b et c sont réels) : $a \xrightarrow{f} f(a) = b \xrightarrow{g} g[f(a)] = g(b) = c$

Les propriétés et théorèmes précédents se retrouvent aisément par une simple visualisation (de tête ou sur un brouillon) d'une situation simple. Les limites exposées ici servent essentiellement dans les problèmes, aussi il est absolument nécessaire de les connaître et surtout de savoir les appliquer sans aucune hésitation !

B. Calcul différentiel.

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à tout ce qui concerne dérivée & primitive de fonctions usuelles et de fonctions composées, ainsi qu'aux accroissements finis. Cependant, certaines fonctions (comme l'*exponentielle*) seront définies plus tard ; reportez-vous alors à la partie correspondante.

Dérivation d'une fonction composée :

Soient u une fonction dérivable, n un entier naturel, α un réel.

Fonction composée	Dérivée
u^n	$n.u^{n-1}.u'$
exp(u)	u'.exp(u)
ln(u)	u'/u
u^α	$\alpha.u^{\alpha-1}$

Nous pouvons donner plusieurs exemples de dérivation de fonctions composées :

u : $\begin{bmatrix} \Re \to \Re \\ x \mapsto \cos(x) \end{bmatrix}$. On a alors : $(u^n(x))' = (\cos^n(x))' = n.\cos^{n-1}(x).(-\sin(x)) = -n.\sin(x).\cos^{n-1}(x)$

v : $\begin{bmatrix}]0,+\infty] \to \Re \\ x \mapsto \ln(1/x) \end{bmatrix}$. On obtient : $(v^n(x))' = (\ln^n(1/x))' = n.\ln^{n-1}(1/x).(-1/x^2) = -n/x^2.\ln(1/x)$

Notations :

Une dérivée première se note de deux manières : f' (la plus courante) et $\frac{df}{dx}$ (notation employée surtout en Physique).
On appelle dérivée seconde la dérivée de la dérivée première. Elle est notée :
f'' ou $\frac{d^2f}{dx^2}$.De manière générale, on appelle dérivée $n^{ième}$ la dérivée de la fonction f dérivée (n-1) fois. On la note : $f^{(n)}$ ou $\frac{d^nf}{dx^n}$.

<u>Inégalité des accroissements finis :</u>

Soit f une fonction dérivable sur un segment I.
Soient a et b deux réels tels que $[a,b] \subseteq I$ si $a \leq b$ ou $[b,a] \subseteq I$ si $b \leq a$.
Si, $\begin{cases} \text{Il existe m et M réels tels que pour tout } x \in [a,b],\ m \leq f'(x) \leq M \\ a \leq b \end{cases}$, alors on a :
$m(b-a) \leq f(b)-f(a) \leq M(b-a)$

Il existe une autre version moins puissante de l'inégalité des accroissements finis mais qui, parfois, suffit pour répondre.

Soit f une fonction dérivable sur un segment I.
S'il existe M réel tel que pour tout x de I, $|f'(x)| \leq M$, alors on a :
pour tout $(a,b) \in I^2$, $|f(b)-f(a)| \leq M.|b-a|$

Les deux versions de cette inégalité sont à savoir. Même si la première est plus puissante, elle exige d'avoir plus de conditions à remplir, et est donc plus difficile à mettre en place que la seconde…

Nous pouvons maintenant aborder les primitives.

<u>Définition :</u>

Une primitive de f sur un intervalle I est une application $F : I \rightarrow \Re$, dérivable et telle que pour tout x de I , $F'(x) = f(x)$.

<u>Propriétés :</u>

- Toute primitive est, par définition, dérivable ;
- Si une fonction f admet une primitive, alors elle en admet une infinité : on peut en effet ajouter à F n'importe quelle constante, car la dérivée d'une constante est égale à zéro. Ainsi, deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.
- f admet une seule primitive si on ajoute une condition sur cette dernière (valeur donnée en un point).

Primitives usuelles :

C désigne une constante à ne pas oublier dans la recherche d'une primitive générale !

f(x)	F(x)
a	ax + C
ax + b	$\frac{1}{2}ax^2 + bx + C$
x^n (où $n \in \mathbb{Z}\backslash -1$)	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
e^x	$e^x + C$
$u'(x).\, e^{u(x)}$	$e^{u(x)} + C$
1/x	ln (x) + C
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	ln (u(x)) + C
sin (x)	-cos (x) + C
sin (ax + b)	$-\frac{1}{a}.\cos(ax + b) + C$

Si on recherche une primitive de $1/x^n$, on écrit cette fonction sous la forme x^{-n}, et on applique la formule affichée dans le tableau. De même pour $\sqrt{x} = x^{1/2}$.

Les fonctions indiquées dans le tableau sont des fonctions usuelles et, par définition, elles sont souvent utilisées. Ce tableau doit donc être su (comme le reste) parfaitement !

C. Fonctions usuelles.

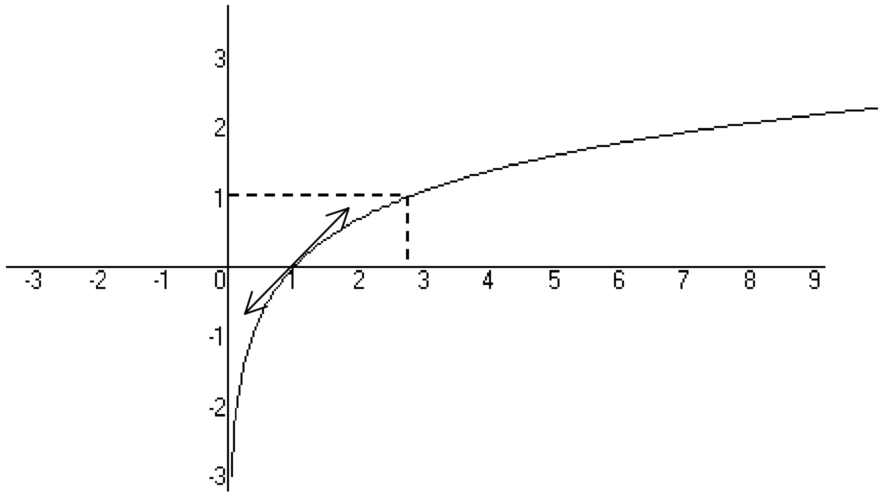
Un grand nombre de ces fonctions ont déjà été étudiées dans les classes précédentes : x^n, cos … Pendant l'année de terminale apparaissent deux nouvelles fonctions intimement liées : la fonction *exponentielle* (exp) et la fonction *logarithme népérien* (ln). Ce paragraphe résume les connaissances acquises auparavant ainsi que les propriétés basiques de "ln" et "exp".

En premier lieu, nous nous pencherons sur l'étude du logarithme népérien, puis de la fonction exponentielle (tout en donnant quelques propriétés de ces nouvelles fonctions) et nous reviendrons par la suite aux fonctions puissances et circulaires. Enfin, il restera l'étude de quelques équations différentielles, ainsi que des limites.

Définition :

La fonction logarithme népérien, notée *ln*, est la primitive définie sur $]0;+\infty[$ de la fonction $x \mapsto 1/x$, et qui s'annule en 1 ($\ln(1) = 0$).

Représentation :



A noter :

- $\ln(1)=0$
- $\ln(e)=1$
- $0<x<1 \Leftrightarrow \ln(x)<0$
- $x>1 \Leftrightarrow \ln(x)>0$

Propriétés :

- ln est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ et, par définition, $(\ln(x))' = 1/x$;
- cette fonction est donc strictement croissante sur son ensemble de définition ;
- $\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$;
- $\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1 \left(= \lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)-\ln(1)}{1+h-1} \right)$, ce qui signifie que la tangente à la courbe au point $(1,\ln(1)) = (1,0)$ a pour pente 1 (voir graphe ci-dessus).

Relations fonctionnelles :

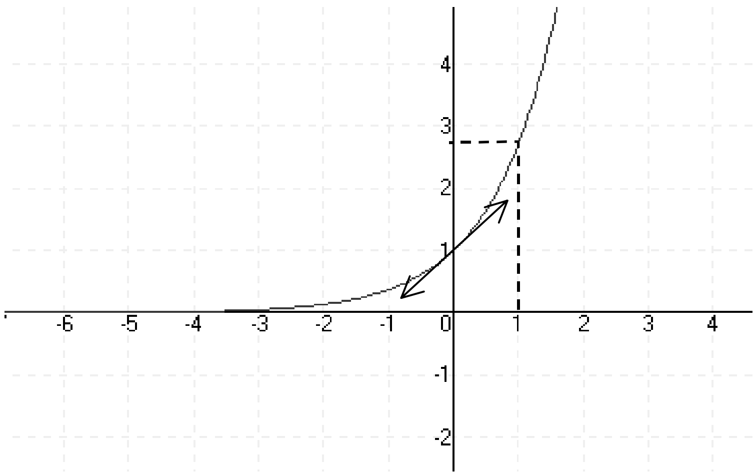
- Pour tout a, b réels strictement positifs, $\ln(a.b) = \ln(a) + \ln(b)$;
- Pour tout a, b réels strictement positifs, $\ln(a/b) = \ln(a)-\ln(b)$;
- Pour tout a réel positif non nul et tout α réel, $\ln(a^{\alpha}) = \alpha.\ln(a)$.

Remarque : la deuxième relation donnée se déduit des deux autres. En effet, $a/b = a.b^{-1}$, d'où : $\ln(a/b) = \ln(a.b^{-1}) = \ln(a) + \ln(b^{-1}) = \ln(a)-\ln(b)$.

Définition :

La fonction exponentielle (exp) est la bijection réciproque de la fonction ln, c'est-à-dire que pour tout x réel, ln[exp(x)] = x, et que pour tout x strictement positif, exp[ln(x)] = x.

Représentation :



A noter :

- exp(0)=1
- e=exp(1)≈2.718
- x<0 ⇔ 0<exp(x)<1
- x>0 ⇔ exp(x)>1

Propriétés :

- exp est définie et dérivable sur $\Re$ et $(\exp(x))' = (e^x)' = e^x$;
- cette fonction est strictement croissante sur l'ensemble des réels ;
- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$;
- $\lim\limits_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1 \left(= \lim\limits_{h\to 0} \frac{e^h-e^0}{h-0} \right)$, ce qui signifie que la tangente à la courbe au point $(0,e^0) = (0,1)$ a pour pente 1 (voir graphe ci-dessus).

Relations fonctionnelles :

- Pour tout a, b réels, $e^{a+b} = e^a.e^b$;
- Pour tout a, b réels strictement positifs, $e^{a-b} = e^a / e^b$.

Remarque :

Nous voyons bien qu'il existe de nombreuses similitudes entre ces deux fonctions. Cela provient du fait que l'exponentielle est la bijection réciproque du logarithme népérien. Beaucoup d'études peuvent ainsi être faites sur ces fonctions. Il est donc impératif de savoir les manipuler ! Dans la suite, nous verrons quelques limites relatives à celles-ci… *(pour dérivation, voir partie précédente)*

Définissons à présent brièvement l'*exponentielle de base a*.

Définition :

Pour tout réel $a > 0$, la fonction exponentielle de base a est la fonction définie sur $\Re$ par : $\exp_a(x) = e^{x.\ln(a)} = a^x$

Remarque :
- si $a = 1$, $\exp_a$ est la fonction constante égale à 1 ;
- si $a = e$, c'est la fonction exponentielle étudiée auparavant.

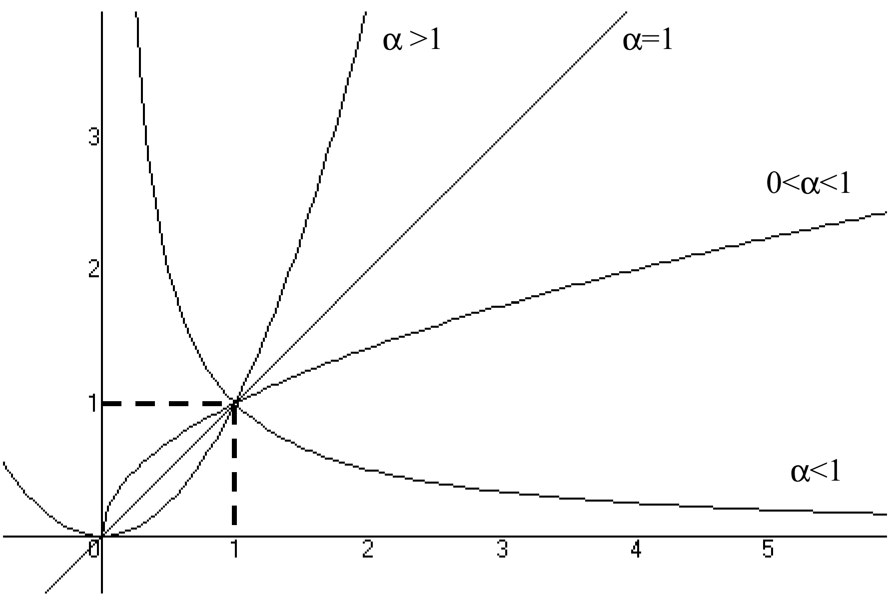
Nous allons maintenant nous intéresser aux fonctions puissances, ainsi qu'à leurs dérivées et leurs comportements asymptotiques.

Définition :

Soit α un nombre réel fixé.
Une fonction puissance désigne toute fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par :
$f(x) = e^{\alpha.\ln(x)} = x^\alpha$

Remarque :
Nous noterons bien qu'ici, à la différence des fonctions *exponentielles de base a*, c'est l'exposant qui est fixé ($x^\alpha \neq \alpha^x$!).

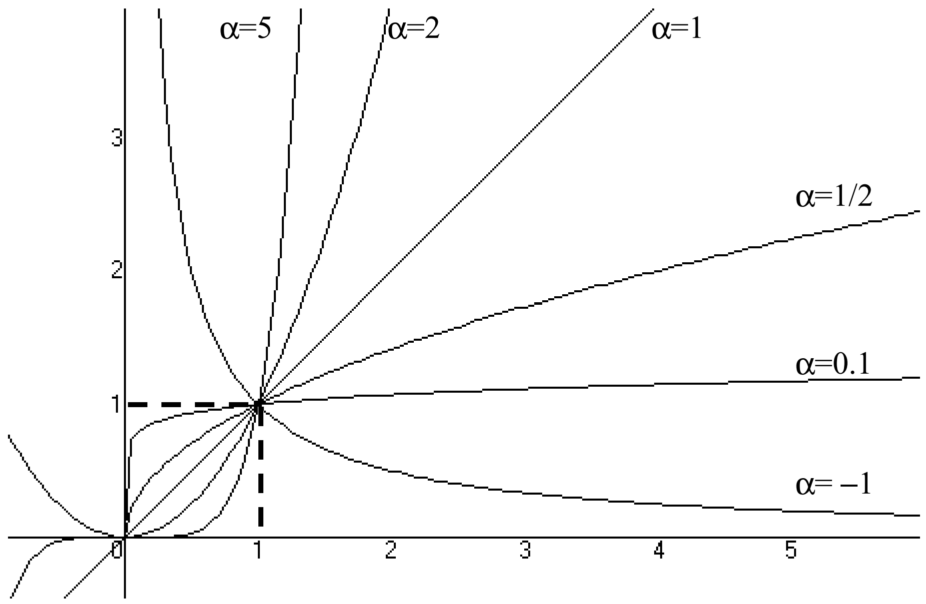
Traçons différents graphes de fonctions puissances suivant la valeur de α :



A noter :

Pour retrouver l'allure de ces courbes, on pourra s'appuyer sur des courbes connues telles que :
- x^2
- x
- $\sqrt{x} = x^{1/2}$
- $1/x = x^{-1}$

(voir feuille suivante).



Remarque importante :

Dans le cas où $\alpha=1/n$ avec n un entier naturel non nul, la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par x^α se note : $\sqrt[n]{x}$

Ainsi, $\sqrt{x} = x^{1/2}$

Remarques :

Les fonctions puissances du type $x \mapsto x^n$ (où n est un entier naturel) ne constituent qu'un cas particulier des fonctions du type $x \mapsto x^\alpha$ (où α est un réel).
L'étude de telles fonctions ne peut se réaliser aisément qu'avec une grande maîtrise de leurs courbes respectives : il est primordial de les savoir, car cela évite ainsi de savoir « par cœur » les limites qui vont être énoncées ci-après.

Propriétés :

- Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^\alpha = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$
- Si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^\alpha = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = 0$

Rappelons brièvement la dérivée d'une fonction puissance (déjà vue plus haut).

Propriété :

La fonction puissance $f : x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$, et :
$\forall x \in \Re$, $f'(x) = \alpha \,.\, x^{\alpha-1} = \alpha \,.\, e^{(\alpha-1).\ln(x)}$
On en déduit (accessoirement) que si $\alpha > 0$, f est strictement croissante, et que si $\alpha < 0$, f est strictement décroissante.

Nous verrons dans la suite des limites relatives à ces fonctions…

Avant d'étudier les fonctions circulaires telles que cosinus ou sinus, ainsi que les équations différentielles, penchons-nous sur les croissances comparées des trois fonctions importantes que nous venons d'aborder, qui sont l'*exponentielle*, le *logarithme népérien* et les *fonctions puissances*. Ces fonctions se comparent surtout en $+\infty$.

Propriétés :

- en $+\infty$, la fonction exponentielle est la fonction dont la courbe représentative croît le plus rapidement (exemple : $\exp(20) \approx 4.9*10^8$) ;
- en $+\infty$, la fonction logarithme est la fonction dont la courbe représentative croît le plus lentement (exemple : $\ln(4.9*10^8) \approx 20$) ;
- en $+\infty$, les fonctions puissances dont $\alpha > 0$ sont comprises entre $\ln(x)$ et $\exp(x)$;
- en $+\infty$, les fonctions puissances dont $\alpha < 0$ tendent vers 0.

Ceci amène les limites suivantes :

Propriétés :

Soit un réel $\alpha > 0$ fixé. On a :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha . e^{-x} = 0$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^\alpha . \ln(x) = 0$

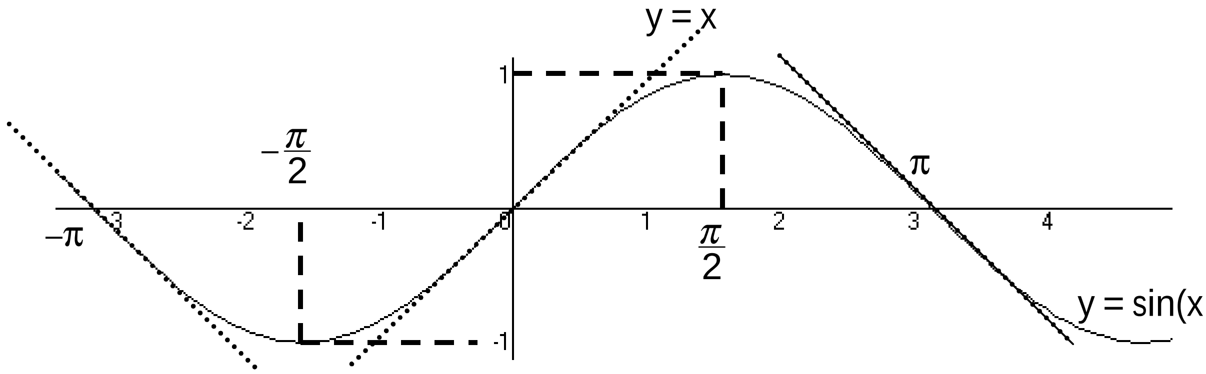
Attachons-nous à présent aux fonctions circulaires ou *trigonométriques* (cos, sin et tan). Celles-ci ont déjà été vues dans des classes antérieures, et ne suivent ci-bas que des rappels et quelques compléments.

La fonction Sinus :

- elle est impaire : $\forall x \in \Re$, $\sin(-x) = -\sin(x)$;
- elle est 2π-périodique ;
- elle est dérivable sur $\Re$, et pour tout x réel, $\sin'(x) = \cos(x)$;
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = \cos(0) = 1 \left(= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} \right)$.

Remarque :

Cette limite permet de déduire que la courbe représentative de la fonction sinus admet une tangente de pente 1 pour x = 0, ce qui signifie qu'au voisinage de 0, $\sin(x) \approx x$.

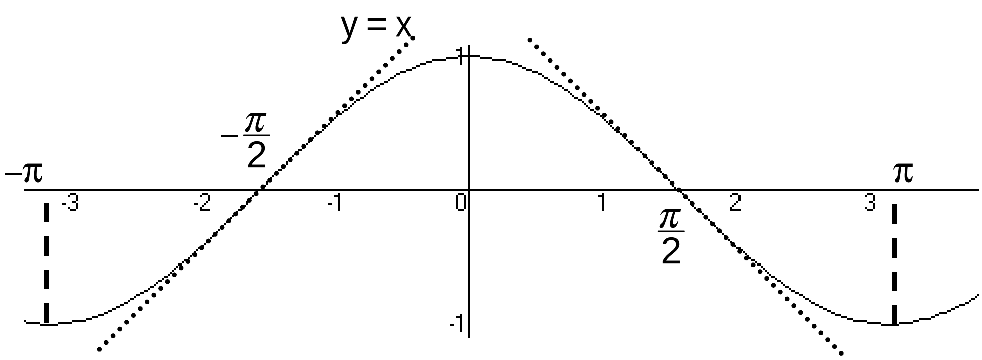


La fonction Cosinus :

- elle est paire : $\forall x \in \Re$, cos(-x) = cos(x) ;
- elle est 2π-périodique ;
- elle est dérivable sur $\Re$, et pour tout x réel, cos'(x) = –sin(x) ;
- $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = 1/2$.

Remarque :

Comme cos(x) = sin(x + π/2), on obtient la courbe représentative de la fonction cosinus par une translation de la courbe représentative de sinus de valeur $-\pi/2\ \vec{i}$.



La fonction Tangente :

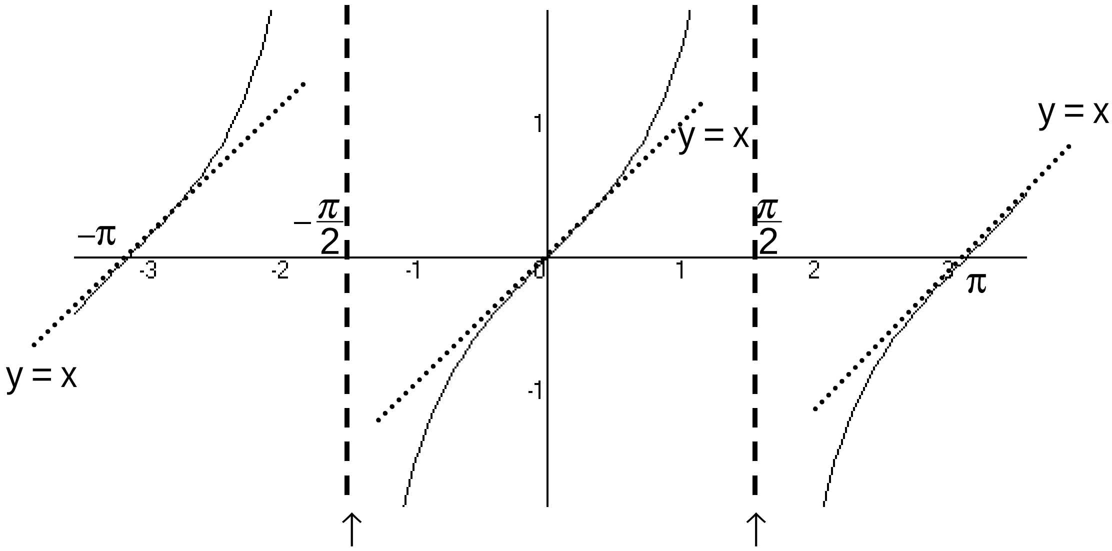
- elle est définie sur $\Re \setminus \{\pi/2 + k.\pi$, k étant entier} ;
- elle est impaire : $\forall x \in \Re$, tan(-x) = -tan(x) ;
- elle est π-périodique ;
- elle est dérivable sur son ensemble de définition, et sur celui-ci, on a : $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = 1/\cos^2(x)$.

Là encore, on peut exprimer une limite relative à la tangente en 0 :
$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = \tan'(0) = 1 + \tan^2(0) = 1 \left(= \lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)-\tan(0)}{x-0} \right).$

Remarque :

L'expression de la dérivée de tan(x) se retrouve facilement par le fait que $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, et que $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$. On retrouve par là même l'ensemble de définition de tangente ($\cos(x) \neq 0$).

Représentation graphique :



asymptotes d'équation : $x = \pi/2 + k.\,\pi$, k étant entier.

Enfin, nous allons conclure cette sous-partie des fonctions trigos. par les indispensables formules de trigonométrie : l'encadré qui suit contient les formules les plus utiles et sont donc à savoir **en priorité !** Il serait préférable de savoir les suivantes pour ceux qui envisagent des études supérieures dont les Maths jouent un rôle relativement important…

Pour tout x réel : $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$;

Pour tout x réel : $\begin{cases} -1 \leq \cos(x) \leq 1 \\ -1 \leq \sin(x) \leq 1 \end{cases}$, qui sont des minorations & majorations élémentaires.

Pour tout a et b réels quelconques :
$\cos(a+b) = \cos(a).\cos(b)-\sin(a).\sin(b)$;
$\sin(a+b) = \sin(a).\cos(b) + \cos(a).\sin(b)$;
$\tan(a+b)=\dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a).\tan(b)}$ (presque inutile en Terminale) ;
$\cos(2a) = \cos^2(a)-\sin^2(a) = 2.\cos^2(a)-1 = 1-2\sin^2(a)$ (car $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$) ;
$\sin(2a) = 2.\sin(a).\cos(a)$;
$\tan(2a)=\dfrac{2.\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$ (se retrouve par la formule en haut de page avec a = b) .

Remarque :
Les formules telles que : cos(a-b) s'obtiennent facilement en remplaçant cos(a-b) par cos(a + (-b)) et en utilisant la formule précédente (cos(a + b) = ...) ainsi qu'en tenant compte des parités.

Et, pour finir cette partie des fonctions usuelles, nous allons nous attacher à la résolution d 'équations différentielles simples du premier et deuxième ordre. Il est à noter qu'il est courant de voir des exercices de Bac exclusivement sur la résolution d'une équation différentielle particulière...
Dans un premier temps, étudions les équations du premier ordre.

Définition :

Une équation différentielle est une équation qui relie une fonction (notée y dans la théorie qui suit) et ses propres dérivées successives (exemples : $y'-4y = 0$; $2y'' + 3y'-7y = 1$). Résoudre une telle équation, c'est trouver <u>toutes</u> les fonctions qui la vérifient.

Propriété :

Les solutions sur $\Re$ de l'équation différentielle linéaire (sans y^2, y'^2, y^3...), du premier ordre (pas de y'', de $y^{(3)}$...), à coefficients constants (a est fixé) et homogène (c'est-à-dire sans second membre), c'est-à-dire du type $y'-ay = 0$ (où a est réel quelconque), sont les fonctions $x \mapsto C.e^{a.x}$, où C est un réel quelconque.
Parmi ces solutions, il en existe une seule qui prend la valeur y_0 en x_0 (condition initiale).

Remarque :
Sans condition initiale ($f(x_0) = y_0$), il existe une infinité de solutions pour l'équation différentielle linéaire $y'-a.y = 0$. Cela provient du faît qu'une fonction admet une infinité de primitives (ajout d'une constante, voir tableau page 6). Il faudra donc une condition initiale pour obtenir l'unicité de la solution, sans quoi on a que l'existence.

De même, il faudra deux conditions initiales pour avoir l'unicité de la solution dans le cas d'une recherche de solutions pour une équation différentielle du second ordre (étudiée dans la suite), soit du type : $y''-\omega^2.y = 0$, avec ω réel fixé (l'exemple donné n'est pas un exemple général).

Exemple de résolution :

Considérons l'équation différentielle définie par (E) $\Leftrightarrow$ 2.f'(x) + 7.f(x) = 0, et résolvons-là.
Dans le cours, on est confronté à une équation de type y'-a.y = 0, donc on s'y ramène :
(E) $\Leftrightarrow$ f'(x) + (7/2).f(x) = 0
Dans cet exemple, a vaut donc –3.5 et, par application directe du cours, les solutions de (E) sont :
$S = \{ f : x \mapsto C.e^{-3,5..x}, C \in \Re \}$
Si on ajoute à l'énoncé une condition initiale, alors on aura unicité de la solution (pas de constante).
Chercher la solution de (E) vérifiant f(2) = 1.
On a les solutions générales. Donc, pour trouver C, il suffit de remplacer par les valeurs :
$C.e^{-3,5.2} = 1 \Leftrightarrow C = e^{7}$
La solution cherchée est donc : pour tout x réel, $f(x) = e^{7}.e^{-3,5.x} = e^{7-3,5.x}$.

A présent, étudions les équations du second ordre, exclusivement du type $y''-\omega^2.y = 0$.

Propriété :

Les solutions sur $\Re$ de l'équation différentielle linéaire du type $y''-\omega^2.y = 0$ (où ω est réel quelconque), sont les fonctions $x \mapsto A.e^{\omega.x} + B.e^{-\omega.x}$, où A et B sont deux réels quelconques.
Parmi ces solutions, il en existe une seule qui prend la valeur y_0 en x_0 et dont la dérivée prend la valeur y'_0 en t_0 (conditions initiales).

Remarque :

On retrouve bien deux conditions initiales à fournir pour avoir l'unicité, car il y a deux variables (autres que x), A et B, dans l'expression générale des solutions.
Les conditions initiales portent sur une valeur particulière pour f, ainsi qu'une valeur particulière pour f' (par exemple, f(2) = 1 et f'(3) = 0).

D. Notions sur les suites numériques.

Nous donnerons dans cette partie quelques énoncés usuels sur les suites (comportement, convergence), puis viendra l'étude de suites particulières ainsi que les suites définies par récurrence.

Beaucoup de théorèmes ont été vu dans les classes antérieures, et les autres sont pour la plupart instinctifs. Il est donc important (comme dans tous les chapitres) de les comprendre pour pouvoir les retrouver par la suite facilement sans s'encombrer la mémoire.

Définissons tout d'abord des termes élémentaires associés aux suites.

<u>Définition :</u>

- *Sens de variation :*

La suite (u_n) est croissante (resp. décroissante) ssi pour tout n où la suite est définie, $u_{n+1} \geq u_n$ (resp. $u_{n+1} \leq u_n$).
Une suite est dite monotone ssi elle est soit croissante, soit décroissante.

- *Majoration, minoration, suite bornée :*

La suite (u_n) est majorée (resp. minorée) ssi il existe un réel M tel que pour tout entier n, $u_n \leq M$ (resp. $u_n \geq M$).
Une suite est dite bornée ssi elle est majorée et minorée.

- *Suites périodiques :*

La suite (u_n) est périodique s'il existe un entier p tel que pour tout entier n, $u_{n+p} = u_n$.

<u>Remarque :</u>
Pour étudier la croissance, on étudie le plus souvent le signe de $u_{n+1}-u_n$ pour tout entier n.
Une suite peut être croissante qu'à partir d'un certain rang n_0. Pour cela, on étudie le signe de $u_{n+1}-u_n$ pour tout entier n supérieur à n_0 .
La périodicité pour les suites est exactement définie de la même manière que pour les fonctions, mais dans le cas présent, la période ne peut être qu'un entier.

<u>Théorème :</u>

Si la suite (u_n) est à termes strictement positifs, alors (u_n) est croissante ssi pour tout n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$
Réciproquement, si la suite (u_n) est à termes strictement positifs, alors (u_n) est décroissante ssi pour tout n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$

<u>Remarque :</u>
Il est indispensable que la suite soit de signe constant pour pouvoir appliquer ce théorème. En effet, si on considère la suite définie par $u_0 = -2$, et pour tout $n \geq 1$, $u_n = 1$, la suite est croissante et $u_1/u_0 < 0$!

Abordons maintenant les termes de convergence et de limite.

<u>Définition :</u>

La suite (u_n) est dite convergente vers le réel L ssi la quantité $|u_n - L|$ peut être rendue aussi petite que l'on veut à partir d'un certain rang, c'est-à-dire que u_n se rapproche infiniment de L au fur et à mesure que n augmente.

On note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$

A contrario, (u_n) est dite divergente, si elle n'admet pas de limite finie pour $n\to+\infty$.

<u>Remarque :</u>

une suite divergente peut avoir ni de limite finie, ni de limite infinie ! Exemple : $u_n = (-1)^n$.

Les quelques propriétés qui suivent sont issues pour la plupart de la définition elle-même. On pourra faire un parallèle entre celles-ci et les toutes premières propriétés énoncées au I_A. Ne pas hésiter à s'y référer (pages 1 à 3).

<u>Propriétés :</u>

Considérons 4 suites (u_n), (v_n), (w_n), (a_n) et un réel L.

- Si, $\begin{cases} \text{à partir d'un certain rang, } |u_n - L| \leq a_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0 \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$;
- Si, $\begin{cases} \text{à partir d'un certain rang, } u_n \leq v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = L' \end{cases}$ alors $L \leq L'$;
- Si, $\begin{cases} \text{à partir d'un certain rang, } u_n \leq v_n \leq w_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L \\ \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = L \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = L$.

Ces propriétés sont donc très proches de celles exprimées pour les fonctions. On aura par exemple reconnu le théorème des gendarmes en dernière position dans le cadre ci-dessus.

En ce qui concerne la détermination de la limite d'une somme, du produit ou du quotient de deux suites admettant des limites finies ou non, on peut effectuer la même opération sur les limites, sauf dans le cas où il existerait une forme indéterminée.
Les formes indéterminées sont les suivantes : $(+\infty) + (-\infty)$; $0*\infty$; ∞/∞ .
On tentera de résoudre ces problèmes par des méthodes similaires à celles utilisées pour les fonctions.

Ainsi, fonctions et suites se ressemblent beaucoup. Nous allons tenter de les rapprocher encore plus en étudiant l'image d'une suite par une fonction.

<u>Propriété :</u>

Soient $(a,\lambda)\in \overline{\Re}^2$, (u_n) une suite à valeurs dans $\Re$ et f une fonction à valeurs dans $\Re$, avec f définie au voisinage de a.

Si, $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = \lambda \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \lambda$

Avant de continuer, faisons un bref rappel sur des suites connues et usuelles, que sont les suites arithmétiques et géométriques.

<u>Les suites arithmétiques :</u>

- Une suite (u_n) est arithmétique s'il existe un réel *r* tel que pour tout entier n où la suite est définie, $u_{n+1}-u_n = r$. *r* est appelé la raison de la suite.
- Pour une telle suite, on peut exprimer chaque terme en fonction d'un seul autre ainsi que de son rang. En supposant que la suite est définie à partir du rang n = 0, on a : $u_n = u_0 + n.r = u_{n-p} + (n-p).r$
- La somme d'une telle suite jusqu'au rang n est égale à :
  $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = \frac{n+1}{2}.(u_0 + u_n)$

<u>Remarque:</u>
Si la raison est strictement positive, (u_n) est strictement croissante et diverge vers $+\infty$. En effet, on a : $u_n = u_0 + n.r$. Or, u_0 est fini (c'est un réel), et n.r tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
Par le même raisonnement, si la raison est strictement négative, (u_n) est strictement décroissante et diverge vers $-\infty$.
Enfin, si r = 0, alors (u_n) est la suite constante égale à son premier terme, et converge vers ce terme.

Les suites géométriques :

- Une suite (u_n) est géométrique s'il existe un réel *r* tel que pour tout entier n où la suite est définie, $u_{n+1} = r.u_n$. *r* est appelé la raison de la suite.
- Pour une telle suite, on peut exprimer chaque terme en fonction d'un seul autre ainsi que de son rang. En supposant que la suite est définie à partir du rang n = 0, on a : $u_n = u_0.r^n = u_p.r^{n-p}$
- La somme d'une telle suite jusqu'au rang n est égale à :

$$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = u_0 . \frac{r^{n+1}-1}{r-1} \text{ si } r\neq 1;$$

$$S_n = (n + 1).u_0 \text{ si } r = 1.$$

Remarque:

Il est impératif de noter que la suite (u_n) évoquée ci-dessus est définie à partir de n = 0 ! Parfois, les suites commencent à partir d'un autre rang (Exemple : pour tout $n\geq 1$, $u_n = 1/n$). Dans ce cas, il faut légèrement transformer les équations données ci-dessus.

Si $|r| < 1$, la suite converge vers 0 (aucune information sur la croissance).

Si r = 1, (u_n) est la suite constante égale à son premier terme.

Si r > 1, alors la suite diverge vers + ou - ∞ suivant que le premier terme est strictement positif ou strictement négatif.

Si $|r| > 1$, alors la suite diverge (aucune information sur la croissance).

Il est également possible de parler, comme pour les fonctions, de croissances comparées entre deux suites du type (ln(n)), (n^α) et (a^n). Retenons principalement qu'en cas d'indétermination seulement, a^n l'emporte sur n^α, qui l'emporte sur ln (n).

Enfin, pour conclure ce sous-chapitre concernant les suites numériques, traitons les suites définies par récurrence, ainsi que le raisonnement par récurrence.

Définition :

Une suite (u_n) est définie par récurrence si le terme d'ordre n s'appuie sur des termes antérieurs tels que u_{n-1}, u_{n-2} ...

Exemple : pour tout entier naturel n, $u_n = n.u_{n-1}$.

Ah, les suites ne seraient pas ce qu'elles sont sans les raisonnements par récurrence… Ce type de raisonnement est très fréquent et, même s'il peut paraître difficile à saisir au début (du faît de la nouveauté), il n'en reste pas moins facile à appliquer. Pour réussir à tous les coups votre récurrence, il suffit d'appliquer à la lettre le schéma qui suit (voir *rédaction* page suivante).

Principe de la récurrence :

Elle sert à prouver qu'une propriété P(n) est vraie pour tout entier n.
Elle se base en quatre étapes nécessaires.

1_ *énoncé de la propriété*. Il suffit de répéter en général ce que demande l'énoncé.
2_ *l'initiation.* C'est montrer que la propriété énoncée est vraie au premier rang.
3_ *le saut.* C'est montrer que si on suppose la propriété vraie au rang n, elle est aussi vraie au rang n + 1.
4_ *la conclusion.* On y dit que la propriété énoncée au début est vraie pour tout n.

On pourrait en fait comparer ce raisonnement à une échelle (que l'on imagine infiniment grande). En effet, la première étape consiste à énoncer la propriété, qui serait : *on peut aller à la hauteur qu'on veut*. La deuxième étape, l'initiation, consiste à dire : *je peux monter sur le premier barreau (donc initiation pour n = 1)*, donc la propriété est vérifiée au cas du premier barreau. L'étape suivante consiste à supposer que nous soyons parvenus au barreau n, et *on veut montrer qu'on peut atteindre le barreau n + 1*. Puisque *nous avons supposé la propriété vérifiée au rang n*, il n'y a aucune difficulté à monter sur le barreau suivant. Donc, si *P(n) est vraie, alors P(n + 1) aussi*. Enfin, la conclusion permet de dire que si on peut aller au barreau de l'échelle qu'on veut, *on peut par conséquent aller à la hauteur qu'on désire*.
Vous voyez bien, par cet exemple, que pour prouver la propriété énoncée, vous diriez (en français) : « je monte les barreaux un à un jusqu'à la hauteur voulue ». C'est exactement ce que ce raisonnement dit, mais mathématiquement.
Voyons avec rigueur la rédaction d'un tel raisonnement (___ remplace ce que vous devez mettre suivant l'énoncé).

Rédaction :

1° Notons, pour tout entier naturel n, la propriété (H_n) : « ___ »
2° ___, donc la propriété est vraie au rang 0 ((H_0) est vraie).
3° Supposons (H_n) vraie, et montrons que (H_{n+1}) est vraie.
___, donc, selon (H_n), ___, et par conséquent, (H_{n+1}) est vraie.
4° Finalement, pour tout entier naturel n, la propriété (H_n) est vraie.

Remarque :

Les calculs n'apparaissent qu'aux parties 2 et 3.
Dans la troisième partie, il est indispensable de se servir de l'hypothèse (H_n) vraie, sans quoi ce n'est pas une récurrence !
Je répète qu'il est facile de rapprocher le raisonnement par récurrence avec une échelle, où l'initiation serait : il existe bien un premier barreau, et où l'étape de saut serait : si on suppose qu'il y a un barreau au rang n, alors on pourra monter sur le barreau suivant.
Pour conclure, les diverses étapes de récurrence sont souvent *dictées* par l'énoncé, et il est rare que vous ayez (en terminale) à construire une récurrence sans aucune aide, donc pas de panique !

E. Travaux pratiques.

Cette partie est dédiée uniquement à la pratique. Nous y retrouverons par conséquent des exercices, des méthodes ou encore des astuces pour pouvoir surmonter des questions qui sont couramment posées le jour de l'examen.

Les programmes actuels appuient de plus en plus l'utilisation de la calculatrice pour la résolution d'exercices. Il est donc indispensable de savoir utiliser sa machine. La programmation reste cependant accessoire, mais elle peut se révéler utile dans le cas où de nombreuses itérations seraient nécessaires (comme pour des suites récurrentes, par exemple). Vous devez savoir comment obtenir les valeurs d'une fonction (en général sous forme de table) ainsi que les termes d'une suite. Enfin, la programmation n'est efficace que si elle est rapidement mise en oeuvre, afin de gagner du temps…

L'élève de terminale S doit avoir acquis l'étude des tableaux de variation, et la position d'une courbe par rapport à une tangente. Il doit avoir également quelques notions sur les recherches d'asymptotes, ainsi que le comportement local ou asymptotique d'une fonction. Le tracé des courbes doit être précis et doit rendre compte du travail effectué précédemment (asymptotes et tangentes visibles). Réciproquement, la lecture des propriétés d'une fonction sur sa courbe doit être immédiate ! Nous étudierons un exemple complet (sous forme d'exercice) de ce qui peut vous être demandé, après le paragraphe suivant qui traite de la limite d'une fonction polynôme et rationnelle en $\pm\infty$.

La limite d'une fonction polynôme est très facile à obtenir en $\pm\infty$. En effet, une fonction polynôme est toujours du type : $a_1.x^n + a_2.x^{n-1} + \dots + a_{n-1}.x^2 + a_n.x + a_{n+1}$, où $(a_1,\dots,a_{n+1})$ sont tous des réels fixés (avec a_1 non nul, qui est alors appelé coefficient dominant). Or, en $\pm\infty$, c'est le terme de plus haut degré qui « l'emporte » sur les autres, soit, ici, $a_1.x^n$. La limite en $-\infty$ est alors facile à obtenir :

1. si n est pair et supérieur à 2 (x^2, par exemple) et a_1 positif, la limite cherchée sera $+\infty$;
2. si n est impair et supérieur à 1 (x^3, par exemple) et a_1 positif, la limite cherchée sera $-\infty$;
3. si n est pair et supérieur à 2 ($-x^2$, par exemple) et a_1 négatif, la limite cherchée sera $-\infty$;
4. si n est impair et supérieur à 1 ($-x^3$, par exemple) et a_1 négatif, la limite cherchée sera $+\infty$

Quant à la limite en $+\infty$, elle est évidente :

1. si a est positif, la limite cherchée sera $+\infty$ (exemple : $3.x^5$) ;
2. si a est négatif, la limite cherchée sera $-\infty$ (exemple : $-7.x$) .

Quant aux limites des fractions rationnelles, elles sont immédiates si ce qui précède a été compris. En effet, il y a juste une manipulation (facile) à effectuer pour rejoindre le cas des polynômes.

Une fraction rationnelle est toujours du type : $\dfrac{a_1.x^n+a_2.x^{n-1}+\dots+a_n.x+a_{n+1}}{b_1.x^p+b_2.x^{p-1}+\dots+b_{p+1}}$ où n et p sont des réels fixés, a_1 et b_1 des réels fixés non nuls, et les autres coefficients des réels constants.

Pour déterminer la limite d'une fraction rationnelle, voici ce qu'il faut faire :

- factoriser et le nominateur, et le dénominateur par le terme de plus haut degré ainsi que de son coefficient, soit ici : $a_1.x^n$ et $b_1.x^p$. On obtient la fraction suivante :

$$\frac{a_1.x^n+a_2.x^{n-1}+\ldots+a_n.x+a_{n+1}}{b_1.x^p+b_2.x^{p-1}+\ldots+b_{p+1}} = \frac{a_1.x^n\left(1+\frac{a_2}{a_1}.x^{-1}+\ldots+\frac{a_n}{a_1}.x^{-n}+\frac{a_{n+1}}{a_1}.x^{-n-1}\right)}{b_1.x^p\left(1+\frac{b_2}{b_1}.x^{-1}+\ldots+\frac{b_n}{b_1}.x^{-n}+\frac{b_{n+1}}{b_1}.x^{-n-1}\right)}$$

$$= \frac{a_1.x^n}{b_1.x^p} . \frac{1+\frac{a_2}{a_1.x} + \ldots + \frac{a_n}{a_1.x^n} + \frac{a_{n+1}}{a_1.x^{n+1}}}{1+\frac{b_2}{b_1.x} + \ldots + \frac{b_n}{b_1.x^p} + \frac{b_{n+1}}{b_1.x^{p+1}}}$$

$$= \frac{a_1}{b_1}.x^{n-p} . \frac{1+\frac{a_2}{a_1.x} + \ldots + \frac{a_n}{a_1.x^n} + \frac{a_{n+1}}{a_1.x^{n+1}}}{1+\frac{b_2}{b_1.x} + \ldots + \frac{b_n}{b_1.x^p} + \frac{b_{n+1}}{b_1.x^{p+1}}}$$

- On extrait ce que l'on a mis en facteur, c'est-à-dire $\frac{a_1}{b_1}.x^{n-p}$, et on applique les mêmes règles que pour les polynômes (voir page précédente). En effet, tout ce qui est en 1/x, $1/x^2$ etc . tendent vers 0 lorsque x tend vers l'infini. Donc la fraction de droite tend vers 1, et la limite de la fraction totale se réduit ainsi à la limite du polynôme $\frac{a_1}{b_1}.x^{n-p}$.

<u>Exemple :</u>

Considérons la fonction f : x $\mapsto \frac{3.x^5+2.x^3-5.x^2+3}{6.x^3-8x}$.

Première question : Ensemble de définition de f ?

Réponse : il suffit de factoriser le dénominateur, et on trouve :

$D_f =]-\infty ; \frac{-2.\sqrt{3}}{3} [\cup] \frac{-2.\sqrt{3}}{3} ; 0[\cup]0 ; \frac{2.\sqrt{3}}{3} [\cup] \frac{2.\sqrt{3}}{3} ; \infty[$.

Seconde question : Quelles sont les limites en $\pm\infty$ de f ?

Réponse : $f(x) = \frac{3.x^5+2.x^3-5.x^2+3}{6.x^3-8x} = \frac{3.x^5}{6.x^3} . \frac{1+2/(3.x^2)-5/(3.x^3)+1/(x^5)}{1-8/(6.x^2)}$

$$= \frac{x^2}{2} . \underbrace{\frac{1+2/(3.x^2)-5/(3.x^3)+1/(x^5)}{1-8/(6.x^2)}}_{\underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 1}$$

$\frac{x^2}{2}$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $\pm\infty$, donc f(x) tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers + ou - ∞ .

Avant de débuter un exercice, énonçons le *théorème de la bijection* qui est très utile pour la résolution des problèmes de bac.

<u>Théorème :</u>

Soit f une fonction dérivable, **I =** [a,b] un intervalle.
Si f est dérivable, <u>strictement</u> croissante, définie sur **I**, alors f réalise une bijection de [a;b] sur [f(a);f(b)].

Ce théorème peut également être énoncé dans le cas d'une fonction strictement décroissante :
Si f est dérivable, <u>strictement</u> décroissante, définie sur **I**, alors f réalise une bijection de [a;b] sur [f(b);f(a)].

Ce théorème trouve essentiellement une utilité lorsqu'une question est du type : « montrer que l'équation f(x) = 0 admet une unique solution ».
En effet, dire qu'une fonction réalise une bijection sur I, cela signifie que pour tout élément de f(I), il existe un unique x appartenant à I tel que f(x) soit égal à cet élément. Se référer à l'exercice suivant pour une mise en pratique.

Nous allons faire une étude complète d'une fonction sous forme d'exercice en deux parties. Nous y retrouverons des questions courantes sur les variations, la position d'une courbe par rapport à une de ses tangentes, le tracé de cette courbe... Dans les réponses, les points « méthode » sont indiqués en italique.

<u>Exercice :</u> *extrait de problème de Bac année 97.*

Partie A.

<u>Questions</u>.

Soit f la fonction définie sur $\Re$ par : $f(x) = e^{x} + x + 1$
1° Etudier le(s) sens de variation de f ainsi que ses limites en $\pm\infty$.
2° Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une unique solution α, et que l'on a : $-1.28 < \alpha < -1.27$.
3° En déduire le signe de f(x) sur $\Re$.

<u>Réponses.</u>

1° *Pour étudier les sens de variation, on calcule la dérivée et on en étudie le signe.*
f est définie et dérivable sur $\Re$. Nous pouvons donc calculer sa dérivée :
Pour tout x réel (*à ne pas oublier !*), $f'(x) = (e^{x})' + (x)' + (1)' = 1.e^{x} + 1 + 0 = e^{x} + 1$
Or, pour tout x réel, $e^{x} > 0$, et donc $e^{x} + 1 > 0$. On a donc :
pour tout x réel, $f'(x) > 0$.

Après cette étape, il est pratiquement indispensable de réaliser un tableau de variation : C'est ce que l'on attend de vous !

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	

Il ne faut pas hésiter à faire autant de tableaux que nécessaire ! En général, on en construit un en début d'exercice (comme ici) et un second lorsque l'on peut complètement remplir un tel tableau, c'est-à-dire que doivent y figurer les variations elles-même, les doubles barres pour les valeurs dites « interdites » (là où f n'est pas définie), les limites de f à ces endroits ainsi qu'en l'infini (si on vous a demandé de les chercher, ou si elles sont immédiates), les éventuelles équations d'asymptotes et/ou de tangentes qu'on vous a demandé de calculer. Un tableau bien rempli est nécessaire pour la construction des courbes. Enfin, il est clair que si la fonction étudiée n'est pas la fonction principale, il est inutile de détailler à fond (c'est le cas pour f : cette fonction ne sert que de préliminaire pour l'étude de g en partie B). La première chose à faire est, par conséquent, de lire tout l'énoncé au moins deux fois pour éviter d'accorder trop de temps sur des questions à notation faible.

Etudions les limites de f en l'infini.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty \end{cases}, \text{ donc } \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x + x + 1 = -\infty$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \end{cases}, \text{ donc } \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^x + x + 1 = +\infty$$

Attention ! Il faut bien préciser comme cela, et non dire : $\lim (e^x + x + 1) = \lim (e^x) + \lim (x + 1)$, car cette équation est fausse ! (il peut apparaître des formes indéterminées du type : $\infty-\infty$...)
On pourrait ici faire un tableau de variation, mais j'ai pertinemment lu la question 3°.

2° *Cette question est du même type que celle évoquée au milieu de la page 23. Il y a donc de grandes chances qu'il nous faut appliquer le théorème de la bijection... Et c'est bien ce qu'il faut faire.*
Appliquons le théorème de la bijection :
f est <u>dérivable sur $\Re$</u>, <u>strictement croissante</u> de <u>$]-\infty ; +\infty[$ dans $]-\infty ; +\infty[$</u>. Donc f admet une bijection de $]-\infty ; +\infty[$ dans $]-\infty ; +\infty[$. Or, <u>0 appartient à l'intervalle image</u>, donc <u>il existe un unique</u> α tel que $f(\alpha) = 0$.
Tout ce qui est souligné ci dessus est essentiel ! Ces deux phrases doivent être sues par cœur, et réécrites (en adaptant à l'énoncé) lors d'une telle question. En ce qui concerne l'encadrement, l'énoncé demande simplement de le vérifier. Hors de question donc de trouver celui-ci soi-même !

Calculons f(-1.27) et f(-1.28) *(à la calculatrice, bien entendu !)*:
$f(-1.28) \approx -0.00196$
$f(-1.27) \approx 0.0108$
Ainsi, $f(-1.28) < 0$, et $f(-1.27) > 0$. Or, f réalise une bijection sur $\mathfrak{R}$, et donc, avec $f(\alpha) = 0$:
$f(-1.28) < f(\alpha) < f(-1.27) \Leftrightarrow -1.28 < \alpha < -1.27$
En effet, toutes les valeurs avant α ont une image par f STRICTEMENT négative (car f strictement croissante), et toutes les valeurs après α ont une image par f STRICTEMENT positive (voir tableau de variation suivant).

3° *Pas besoin ici d'écrire des lignes de français... Tout a déjà été dit, et seul un tableau de variation suivi d'un tableau de signe (surtout) est nécessaire. On n'omettra pas cependant la conclusion, toujours indispensable (notamment pour s'assurer le maximum des points !).*

	$-\infty$		α		$+\infty$
f(x)	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
Signes		–	0	+	

Ainsi, pour tout $x \in]-\infty ; \alpha[$, $f(x) < 0$;
$f(\alpha) = 0$;
pour tout $x \in]\alpha ; +\infty[$, $f(x) > 0$.

<u>A retenir sur cette partie</u> : les tableaux de variations sont indispensables, rapides à faire et évitent un baratin parfois lourd et peu clair... Ne pas hésiter à en faire !
Le théorème de la bijection doit être appliqué à la lettre.

Partie B.

<u>Questions</u>.

Soit g la fonction définie sur $\mathfrak{R}$ par : $g(x) = \dfrac{x.e^x}{1+e^x}$, et notons (C_g) sa courbe représentative dans un repère orthonormal (O, i, j) du plan (unité graphique : 4cm.).

1° Montrer que $g'(x) = \dfrac{e^x.f(x)}{(e^x+1)^2}$, et en déduire le sens de variation de g.
2° Montrer que $g(\alpha) = \alpha + 1$, et en déduire un encadrement de $g(\alpha)$.
3° Soit (T) la tangente à (C) au point d'abscisse 0. Donner une équation de (T), et étudier la position de (C) par rapport à (T).

4° Chercher les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C), et étudier la position de (C) par rapport à (D).
5° Dresser le tableau de variation de g.
6° Tracer sur un même dessin (C), (T) et (D), en ne faisant apparaître que les points d'abscisses [-2;4].

Réponses :

1° *Pour démontrer une égalité, soit on part d'un membre et on essaie, par les calculs, d'aboutir à l'autre, soit on transforme les deux membres de manière à obtenir les expressions les plus simples qu'on puisse avoir pour chacun. Il est conseillé d'opter pour cette seconde solution lors de la recherche au brouillon.*
Pour tout x réel, g est définie et g est dérivable sur $\Re$. Calculons sa dérivée :

Pour tout $x \in \Re$, $g'(x) = \dfrac{(x.e^x)'.(1+e^x) - x.e^x.(1+e^x)'}{(1+e^x)^2}$

$$= \frac{(1.e^x + x.e^x).(1+e^x) - x.e^x.(e^x)}{(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{e^x + x.e^x + e^{2x} + x.e^{2x} - x.e^{2x}}{(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{e^x(1+x+e^x)}{(1+e^x)^2}$$

Or, pour tout x réel, $f(x) = e^x + x + 1$, donc on obtient :

pour tout x réel, $g'(x) = \dfrac{e^x.f(x)}{(e^x+1)^2}$.

Dans la partie A, nous avons cherché le signe de f. Or, $g'(x) = f(x) . \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$. Cherchons donc le signe de $\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$. La fonction exponentielle étant toujours à valeurs strictement positives, le numérateur et le dénominateur sont strictement positifs. On peut donc dresser le tableau de signe de g :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f(x)		–	0	+	
$\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$		+		+	
g'(x)		–	0	+	

Nous pouvons donc en déduire les variations de g :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$g(\alpha)$	$\nearrow$	

Notons que la cinquième question nous demande de dresser le tableau de variation de g. Cela signifie qu'il nous faudra compléter le tableau ci-dessus, en vue de construire la courbe représentative de la fonction g. Les questions 2 à 4 nous donnerons ces renseignements. Il est donc inutile de chercher les limites de g en l'infini pour l'instant, par exemple…

2° *Nous avons encore une égalité à prouver. Elle concerne (en partie) le nombre α. Pour traiter facilement cette question, il est indispensable de réunir toutes les informations déjà collectées sur ce nombre !*

Calculons $g(\alpha)$:

$g(\alpha) = \dfrac{\alpha \,.\, e^{\alpha}}{1+e^{\alpha}}$.

Or, nous savons que *(collecte des informations)* :

$f(\alpha) = 0$, c'est-à-dire $e^{\alpha} + \alpha + 1 = 0$;

$-1.28 < \alpha < -1.27$ *(inutile ici, car on ne cherche pas de valeur approchée)* .

Nous voyons bien que la solution n'est pas évidente. Il faut donc s'aider de l'équation donnée par l'énoncé pour trouver : en effet, α + 1 n'est pas une fraction, et g(α) se présente comme étant une fraction. Il faut donc essayer de se débarrasser du dénominateur en faisant apparaître au nominateur un terme du type « 1 + e^{α} », ce que je vais faire dans la suite…

$e^{\alpha} + \alpha + 1 = 0$, donc $\underline{e^{\alpha} + 1} = -\alpha$ ou encore $\alpha = -(e^{\alpha} + 1)$. Par conséquent, on a :

$g(\alpha) = \dfrac{\alpha \,.\, e^{\alpha}}{1+e^{\alpha}} = \dfrac{-(e^{\alpha}+1).\, e^{\alpha}}{1+e^{\alpha}} = \dfrac{1+e^{\alpha}}{1+e^{\alpha}}.(-e^{\alpha}) = -e^{\alpha}$

Or, $e^{\alpha} + \alpha + 1 = 0$, donc $-(e^{\alpha}) = \alpha + 1$, et enfin :

$g(\alpha) = \alpha + 1$

Remarquons que nous aurions pu procéder autrement, c'est-à-dire, toujours en suivant la même méthode, non pas faire apparaître le dénominateur au nominateur, mais l'inverse, soit faire apparaître α au dénominateur…

Il nous faut maintenant encadrer $g(\alpha)$. Or, $-1.28 < \alpha < -1.27$, et nous savons que $g(\alpha) = \alpha + 1$, d'où :

$-0.28 < \alpha + 1 < -0.27$ soit $-0.28 < g(\alpha) < -0.27$, et nous avons encadré $g(\alpha)$.

Il faut toujours garder à l'esprit toutes les hypothèses et les renseignements fournis par l'énoncé ou trouvés au fil des questions. Il est en effet très très rare qu'une information soit donnée alors qu'elle n'a aucune utilité dans le problème.

3° *Dans les classes antérieures a été vu la formule donnant l'équation de la tangente à une courbe en un point donné. Il suffit de l'écrire…*
g est dérivable en 0, et donc l'équation de (T) a pour expression :
(T) : y = g'(0).(x-0) + g(0)
Or, g(0) = 0 et g'(0) = 1/2 (après calcul).
(T) a donc pour équation : y = $\frac{1}{2}$.x

En ce qui concerne l'étude de la position d'une courbe vis à vis d'une de ses tangentes ou de ses asymptotes, on calcule toujours la différence entre leurs équations afin d'en trouver son signe : dans le cas présent, on cherche le signe de g(x)-(1/2).x. Si g(x)-(1/2).x > 0, alors g(x) > (1/2).x et donc (C) sera au dessus de (T), et réciproquement…
Cherchons le signe de g(x)-(1/2).x :

pour tout x réel, $g(x)-(1/2).x = \frac{x.e^x}{1+e^x} - (1/2).x$

$$= \frac{2x.e^x}{2.(1+e^x)} - \frac{x.(1+e^x)}{2.(1+e^x)}$$

$$= \frac{2x.e^x-x-x.e^x}{2.(1+e^x)}$$

$$= \frac{x.(e^x-1)}{2.(1+e^x)}$$

Afin de trouver le signe de l'expression précédente, faisons un tableau de signe :

	$-\infty$		0		$+\infty$
x		–	0	+	
e^x-1		–	0	+	
$2.(1 + e^x)$		+		+	
g(x)-(1/2).x		+	0	+	

Il est normal d'avoir g(x)-(1/2).x = 0 pour x = 0, car (1/2).x est tangente à (C) en 0 !
Ainsi, pour tout x non nul, g(x)-(1/2).x > 0, c'est-à-dire g(x) > (1/2).x .
Ainsi, (C) est placée au-dessus de (T) pour tout x réel.

4° Cherchons les limites de g en l'infini.
Par le cours, nous savons que : $\lim_{x\to+\infty} x.e^{-x} = 0$, ou encore $\lim_{x\to-\infty} (-x.e^x) = 0$ soit $\lim_{x\to-\infty} x.e^x = 0$

(voir milieu de page 11).

On obtient par conséquent :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x.e^{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 1+e^{x} = 1 \end{cases} \quad \text{donc } \lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x.e^{x}}{1+e^{x}} = 0$$

Nous n'avons par de limites du cours pour calculer la limite de g en + ∞. Nous sommes pourtant devant une forme indéterminée : ∞/∞. Comme pour les fractions rationnelles, il nous faut donc factoriser par le terme le plus « important » pour le nominateur et le dénominateur, c'est-à-dire, ici, exp(x). En effet, exp(x) > x en + ∞.

Pour tout x réel, $g(x) = \dfrac{x.e^{x}}{1+e^{x}} = \dfrac{e^{x}.(x)}{e^{x}.(e^{-x}+1)} = \dfrac{x}{e^{-x}+1}$

Il n'apparaît plus de forme indéterminée… Cette méthode qui consiste en la factorisation du terme « le plus fort » est excellente pour lever ces indéterminations (en l'infini).

On obtient par conséquent :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1+e^{-x} = 1 \end{cases} \quad \text{donc } \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x.e^{x}}{1+e^{x}} = +\infty$$

En ce qui concerne les asymptotes, vous devez connaître surtout quelques notions. La recherche d'une asymptote ne vous sera jamais demandé: elle vous est en général donnée par l'énoncé. Une asymptote est une droite dont la courbe étudiée se rapproche de plus en plus. On peut avoir des asymptotes verticales (exemple : pour la fonction 1/x, la droite d'équation x = 0 est asymptote à la courbe en 0), horizontales (exemple : pour la fonction exp(x), la droite d'équation y = 0 est asymptote à la courbe en -∞) ou obliques : c'est le cas dans notre exercice. Pour montrer qu'une droite est asymptote à une courbe, il faut montrer que l'écart entre elles deux diminue infiniment, c'est-à-dire que la limite de la différence de ces deux équations tend vers 0 pour x tendant vers l'infini si la droite est asymptote en l'infini.

Calculons la limite de la différence entre (C) et (D) en l'infini :

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x)-x = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x.e^{x}}{1+e^{x}} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x.e^{x}-x.(1+e^{x})}{1+e^{x}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x}{1+e^{x}}$$

Or, d'après le cours, $\lim\limits_{x\to+\infty} x.e^{-x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (g(x)-x) = 0$, ce qui signifie qu'en + ∞, la droite d'équation y = x est asymptote à la courbe représentative de la fonction g.

En - ∞, $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 1+e^{x} = 1 \end{cases}$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} (g(x)-x) \neq 0$ ce qui signifie que la droite d'équation y = x n'est pas asymptote à la courbe représentative de la fonction g en - ∞.

Etudions la position de (C) par rapport à (D) :

pour tout x réel, $g(x)-x = \frac{-x}{1+e^{x}}$

Réalisons un tableau de signe :

	$-\infty$		0		$+\infty$
$-x$		+	0	–	
$1+e^{x}$		+		+	
$g(x)-x$		+	0	–	

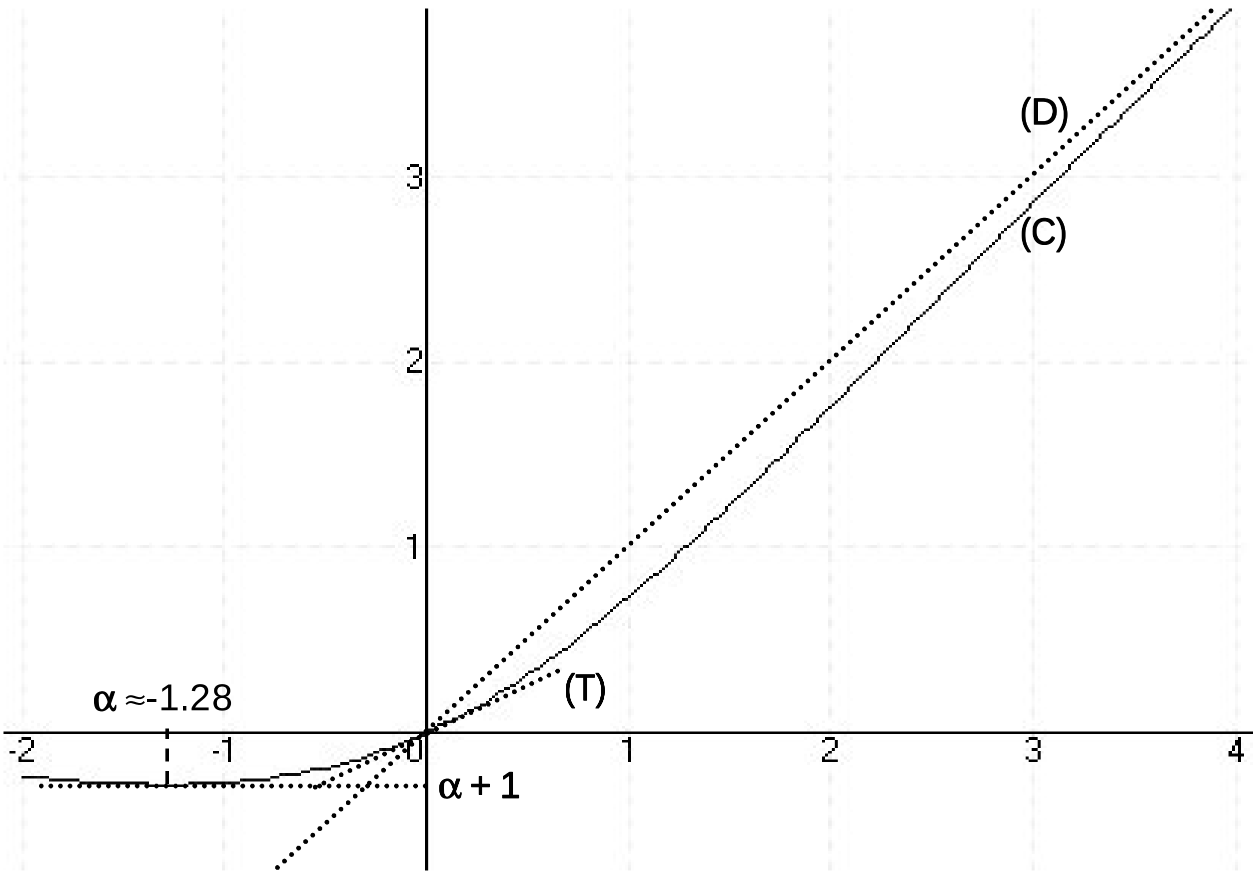
Ainsi, pour tout $x\in\ ]-\infty;0[$, $g(x) > x$, donc (C) est au-dessus de (D) ;
pour $x = 0$, (C) et (D) sont confondus ($g(0) = 0$) ;
pour tout $x\in\ ]0;+\infty[$, $g(x) < x$, donc (C) est en dessous de (D).

5° *Cette question nous sert à résumer en un tableau toutes les informations trouvées dans les questions précédentes. Nous avions ébauché un premier tableau de variation de g (page 27), et il nous faut maintenant le compléter afin de construire sans difficulté la courbe.*
Dressons le tableau de variation de g :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
g(x)	0	↘	$g(\alpha) = \alpha + 1$	↗	0	↗	$+\infty$
	Asymptote horizontale d'équation y=0.		Tangente horizontale.		Tangente d'équation y=x/2.		Asymptote oblique d'équation y=x.

Nous venons d'établir un tableau de variation complet : il indique bien entendu les variations elles même, les différentes tangentes et asymptotes qu'on nous a demandés de calculer (l'asymptote en $-\infty$ provient de la limite de g en $-\infty$ et est donc immédiate et il est par conséquent préférable de l'indiquer) ainsi que les limites et valeurs en certains points. Les positions relatives entre (C) et (D) ou encore entre (C) et (T) ne sont pas indiquées car elles surchargeraient le tableau… Elles ne sont cependant pas à omettre lors de la construction du graphe !
Soyons clair que l'on ne vous demande que les variations dans cette question, mais un tableau bien rempli contribue à donner à l'examinateur une bonne impression de vous, ce qui est toujours préférable… De plus, cela facilite la construction des graphiques…

6° Tracé de (C), (T) et (D).



Compte tenu de la largeur des feuilles, je n'ai pu respecter une partie des consignes de l'énoncé (très importantes !). En effet, l'échelle ci-dessus n'est pas de 4 cm par unité...

C'est ainsi que se termine cette partie concernant les fonctions numériques ainsi que leur étude locale et globale...
Il faut principalement retenir et maîtriser les deux nouvelles fonctions abordées, qui sont l'exponentielle et le logarithme népérien, ainsi que leurs dérivées, les limites qui leurs sont associées (croissances comparées...), etc.
Il est préférable également d'avoir une vision graphique des limites exposées en tout début de chapitre pour pouvoir se les remémorer sans perdre de temps.
L'inégalité des accroissements finis est aussi à savoir.
Même si les suites et surtout les équations différentielles apparaissent moins fréquemment dans les exercices et problèmes de bac, il ne faut pas prendre le risque de moins apprendre ces points !
Enfin, pour ce qui est des suites définies par récurrence, elles sont rares mais peuvent tout de même faire leur apparition dans des cas simples. Quant au raisonnement par récurrence, il est presque superflu de le connaître (tout du moins en terminale !)

Enfin, l'exercice proposé dans les travaux pratiques réunit beaucoup de questions banales... Aussi il est <u>indispensable</u> de pouvoir le faire rapidement et en entier !

II. Calcul intégral.

A. Intégrale d'une fonction sur un segment.

Les intégrales font souvent l'objet de fin de problèmes… En général, ce sont des questions indépendantes aux questions posées précédemment. Il est donc facile d'obtenir des points, d'autant plus que les questions sont souvent courantes et banales… Le calcul intégral est donc à ne pas négliger, et avec de l'exercice, ce seront des points facilement gagnés.

Définissons tout d'abord ce qu'est l'intégrale d'une fonction :

> Définition :
>
> Soit f une fonction dérivable sur un intervalle [a;b], a et b étant réels, et F une primitive de f.
> L'intégrale de a à b de la fonction f est le réel F(b)-F(a).
> On note : $\int_a^b f(t).dt$.

Remarque :
F est une primitive quelconque de f. En effet, quelque soit F, F(b)-F(a) aura toujours la même valeur, car la constante additive s'annule grâce à la différence de F(b) avec F(a).

Nous pouvons également faire un lien avec la primitive elle-même !

> Propriété :
>
> La primitive G de f qui s'annule en a est donnée par : $G(x) = \int_a^x f(t).dt$

Remarques :
Attention ! Il faut bien différencier x et t ! L'élément « *d* t » à la fin de l'intégrale indique quelle est la variable d'intégration (qui est donc, ici, t), alors que x est la variable que l'on manipule couramment. Par conséquent, il ne faut jamais oublier l'élément « dt » , sans quoi on ne sait pas par rapport à quelle variable qu'on doit intégrer…
On peut noter que G'(x) = f(x)…
G est LA primitive de f qui s'annule en a. En effet, G(a) = F(a)-F(a) = 0.

Nous pouvons également interpréter les intégrales sous forme d'aires :

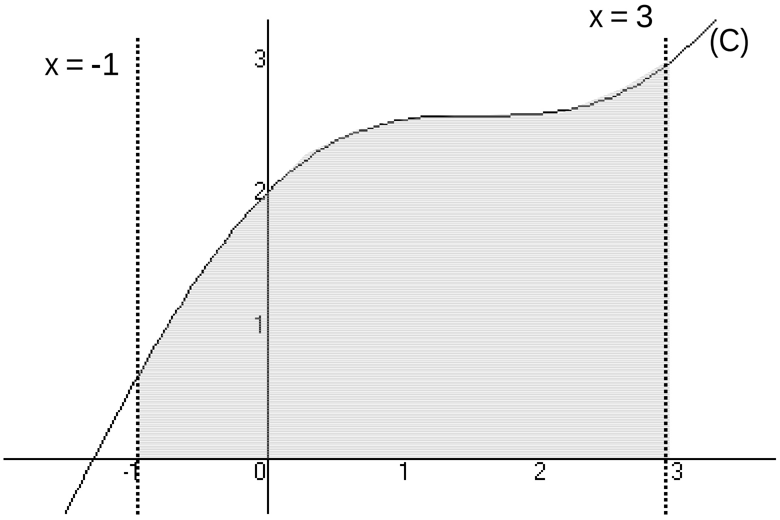
<u>Propriété :</u>

Soit f une fonction positive sur [a;b] (avec a et b deux réels tels que a < b) et (C) sa courbe dans un repère (O, i, j). Alors l'intégrale de a à b de f ($\int_a^b f(t).dt$) est égale à l'aire délimitée par l'axe des abscisses, (C) et les droites d'équation x = a et x = b :

Aire = $\int_a^b f(t).dt$ unités d'aires.

<u>Illustration sur un exemple:</u>

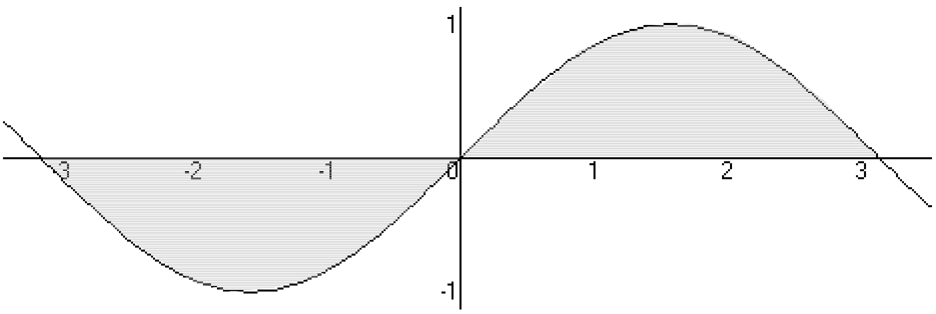
Soit f une fonction positive sur [-1,3]. L'intégrale de –1 à 3 de la fonction f est égale à l'aire qui est grisée.



<u>Remarques :</u>

Il faut prendre garde au fait que l'intégrale est égale à l'aire en <u>unités d'aires</u> ! Ainsi, si l'unité est :2 cm en abscisse et 4 cm en ordonnée, L'aire A sera alors égale à l'intégrale*2*4 : $A = 8.\int_a^b f(t).dt$ cm^2.

Si la fonction f est négative, alors l'aire sera comptée négativement : $A = -\int_a^b f(t).dt$. Prenons par exemple la fonction sinus, et calculons son intégrale de $-\pi$ à π :



Graphiquement, l'aire grisée située à gauche est égale à l'aire grisée située à droite. Intégralement parlant, l'aire de gauche est égale à l'opposé de l'aire de droite. L'intégrale doit donc s'annuler.

Prouvons ce résultat par le calcul :

$\mathbf{I} = \int_{\pi}^{-\pi} \sin(t).dt = [-\cos(t)]_{\pi}^{-\pi} = -\cos(-\pi)-(-\cos(\pi)) = -(-1)-(-(-1)) = 1-1 = 0$

L'intégrale s'annule donc bien.

B. Propriétés de l'intégrale.

A la fin de la page précédente, j'ai abordé la notion de « somme d'intégrale ». Cela est possible par la relation de Chasles :

Propriétés :

Soit f et g deux fonctions intégrables sur [(a;b)] avec a et b deux réels quelconques, et c un réel tel que f soit intégrable sur [(a;c)] et [(b;c)] (les parenthèses dans les crochets indiquent qu'on ne sait pas si a < c ou l'inverse).

- relation de Chasles :

$\int_a^b f(t).dt = \int_a^c f(t).dt + \int_c^b f(t).dt$.

- linéarité de l'intégrale :

$\int_a^b (\alpha.f(t)+\beta.g(t)).dt = \alpha.\int_a^b f(t).dt + \beta.\int_a^b g(t).dt$.

- positivité de l'intégrale :

Si f est une fonction positive sur [a;b] avec a≤b, alors $\int_a^b f(t).dt \geq 0$.

- intégration d'une inégalité :

Si a≤b et si pour tout t de [a;b], f(t)≤g(t), alors on a : $\int_a^b f(t).dt \leq \int_a^b g(t).dt$.

Remarques :

La relation de Chasles est semblable à celle des vecteurs (en ce qui concerne les bornes d'intégration).

La positivité de l'intégrale peut s'énoncer dans le cas de fonctions négatives (référence à l'aire comptée négativement).

lorsque « a≤b » est précisé, cela signifie que c'est une hypothèse essentielle.

Donnons à présent l'inégalité de la moyenne, qui se rapproche beaucoup de l'inégalité des accroissements finis :

Propriété : inégalité de la moyenne.

Soient a et b deux réels tels que a≤b, f une fonction intégrable sur [a;b].
S'il existe m et M deux réels tels que pour tout t de [a;b], m≤f(t)≤M, alors :
$m.(b-a) \leq \int_a^b f(t).dt \leq M.(b-a)$.

Remarque:
La forme obtenue n'est en faît que l'intégration de l'inégalité m≤f(t)≤M. En effet, si on intègre de a à b cette inégalité (a est bien inférieur ou égal à b), on obtient :

$$\int_a^b m.dt \leq \int_a^b f(t).dt \leq \int_a^b M.dt \Leftrightarrow [m.t]_a^b \leq \int_a^b f(t).dt \leq [M.t]_a^b$$

$$\Leftrightarrow m.b-m.a \leq \int_a^b f(t).dt \leq M.b-M.a$$

$$\Leftrightarrow m.(b-a) \leq \int_a^b f(t).dt \leq M.(b-a)$$

Ces deux inégalités servent surtout lorsque l'on cherche à encadrer une intégrale.

On peut trouver, comme pour les accroissements finis, une seconde forme moins puissante :

S'il existe M un réel positif tel que pour tout t de [(a;b)], $|f(t)| \leq M$, alors :
$\left|\int_a^b f(t).dt\right| \leq M\ .\ |b-a|$.

Définissons enfin la valeur moyenne d'une fonction.

Définition :

Soient a et b deux réels tels que a < b, f une fonction intégrable sur [a;b].
La valeur moyenne de f sur [a;b] est égale à : $\frac{1}{b-a} . \int_a^b f(t).dt$

Les règles sur les intégrales sont simples. Il est donc essentiel de ne pas faire de fautes, celles d'inattention étant souvent les plus nombreuses. Lors de l'usage d'une intégrale, il ne faut pas oublier de vérifier que f est définie sur l'intervalle d'intégration, de préciser les bornes, de ne pas se tromper sur la variable d'intégration (t la plupart du temps) et de ne pas oublier l'élément différentiel « dt ».

C. Techniques de calcul.

Dans cette dernière partie, nous nous attacherons à quelques techniques de calcul ainsi que des recommandations pour pouvoir aborder tranquillement toute intégrale.

La première chose est, avant tout, de savoir la définition et les propriétés (peu nombreuses) des intégrales : $\int_a^b f(t).dt = F(b)-F(a)$, relation de Chasles, linéarité, positivité, inégalité de la moyenne doivent être parfaitement sues.

On peut également voir que les primitives interviennent pour le calcul d'une intégrale. Il faut donc connaître le tableau donnant la dérivée d'une fonction, et surtout être capable de le lire inversement ! Vous devez pouvoir trouver la primitive d'une fonction de type u'/u (avec u > 0), u'.(exp(u)), $u^{\alpha}.u'$ (avec α un réel différent de –1), et enfin f'(a.t + b). N'hésitez donc pas à vous reporter aux tableaux page 4 et page 6, sans quoi vous seriez bloqué à la moindre difficulté.

Est aussi à savoir appliquer la technique suivante : l'intégration par parties. Elle consiste à transformer une intégrale peu évidente en une autre plus facile à calculer.

Technique : intégration par parties.

Soient a et b deux réels, u et v deux fonctions telles que u, v et leurs dérivées premières soient dérivables. Alors :

$$\int_a^b u(t).v'(t).dt = [u(t).v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t).v(t).dt$$

Je vous propose dans la suite de poursuivre le problème de bac posé en 1997 (voir pages 23 à 31). Continuons donc avec la partie C. Seules les questions 4 à 6 concernent les intégrales.

Partie C.

Questions :

On considère la fonction h, définie sur [0;1] par : $h(x) = \ln(1 + e^x)$. On note (L) la courbe représentative de h dans (O, i, j), I le point défini par $\overrightarrow{OI} = i$, A le point d'abscisse 0 de (L), et B son point d'abscisse 1.

1° Etudier brièvement les variations de h.

2° Donner une équation de la tangente à (L) en A.

3° On note P l'intersection de cette tangente avec le segment [IB]. Calculer les aires des trapèzes OIPA et OIBA..

4° On admet que la courbe (L) est située entre les segments [AP] et [AB]. Montrer que :

$\ln(2) + 1/4 \leq \int_0^1 h(x).dx \leq \ln(\sqrt{2(1+e)})$.

5° Par une Intégration Par Partie, montrer que : $\int_0^1 g(x).dx = \ln(1+e) - \int_0^1 h(x).dx$

6° En déduire un encadrement de $\int_0^1 g(x).dx$.

Réponses :

J'abrègerais ici les calculs et, de manière générale, les questions 1 à 3, notre but principal étant les questions suivantes.

1° h est définie et dérivable sur [0;1]. Calculons sa dérivée :

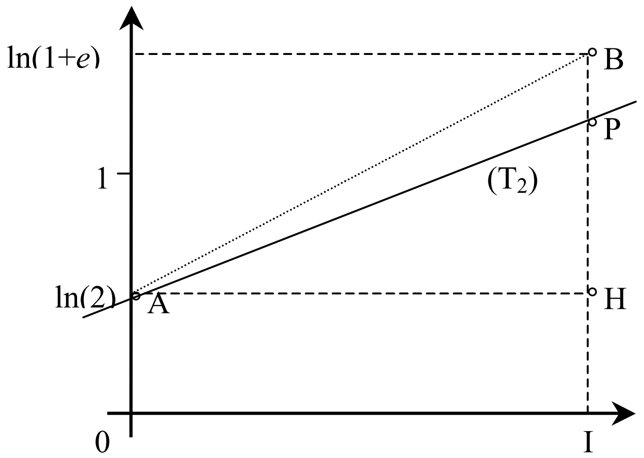
pour tout x de [0;1], $h'(x) = \frac{(1+e^x)'}{1+e^x} = \frac{e^x}{1+e^x}$

Dressons un tableau de variation de h :

	0		1
h'(x)		+	
h(x)	ln(2)	↗	ln(1+e)

2° Equation de la tangente à (L) en A :
$y = h'(0)(x-0) + h(0)$, soit :
$y = (1/2).x + \ln(2)$
Notons (T_2) cette tangente.

3° Rappelons que l'aire d'un trapèze est égal à : $\frac{(\text{petite base} + \text{grande base}).\text{Hauteur}}{2}$.



Remarquons que ce dessin n'est pas exigé, mais là encore, il est préférable de le faire pour éviter une confusion probable, et donc se faciliter la résolution…

Calculons les différentes longueurs :
[OA] = ln(2) ; [IB] = ln(1 + *e*) ; [IP] = (1/2).1 + ln(2) = 1/2 + ln(2) .
On obtient donc :

$A_{OIPA} = \dfrac{(OA+IP).OI}{2} = \dfrac{(\ln(2)+1/2+\ln(2)).1}{2} = 1/4 + \ln(2)$ unités d'aire.

$A_{OIBA} = \dfrac{(OA+IB).OI}{2} = \dfrac{(\ln(2)+\ln(1+e)).1}{2} = (1/2).\ln[2(1 + e)] = \ln(\sqrt{2(1+e)})$ unités d'aire.

4° On admet que la courbe (L) est située entre les segments [AP] et [AB].
Par l'hypothèse qui nous est donnée, nous pouvons en déduire que sur [0;1], la droite passant par les points A et B est en tout point au-dessus de (L), alors que la droite passant par les points A et P est en tout point en-dessous de (L).
Ainsi, en notant u la fonction dont la représentation graphique est la droite passant par A et B, et v celle dont la représentation graphique est la droite passant par A et P, on a :
pour tout $x \in [0;1]$, $v(x) \leq h(x) \leq u(x)$.
Intégrons cette inégalité de 0 à 1 (0 < 1) :

$$\int_0^1 v(t).dt \leq \int_0^1 h(t).dt \leq \int_0^1 u(t).dt .$$

Or, $\int_0^1 v(t).dt$ est égale à l'aire située entre l'axe des abscisses, les droites d'équation x = 0 et x = 1 ainsi que la droite (AP) (car la droite (AP) est à valeurs positives sur [0;1]). Cette intégrale est donc égale à A_{OIPA}. De la même manière, $\int_0^1 u(t).dt$ est égale à l'aire A_{OIBA}. On obtient finalement :

$A_{OIPA} \leq \int_0^1 h(t).dt \leq A_{OIBA}$, d'où, en remplaçant par leurs valeurs :

$\ln(2) + 1/4 \leq \int_0^1 h(t).dt \leq \ln(\sqrt{2(1+e)})$.

5° Rappelons l'expression de g :

pour tout x réel, $g(x) = \dfrac{x.e^x}{1+e^x}$.

Montrons que $\int_0^1 g(x).dx = \ln(1 + e) - \int_0^1 h(x).dx$ par une intégration par parties.

$$\int_0^1 g(x).dx = \int_0^1 x.\frac{e^x}{1+e^x}.dx .$$

Afin d'appliquer la technique de l'intégration par parties, prenons u = x et v' = $\dfrac{e^x}{1+e^x}$*. On a alors u' = 1 et v = ln(1 +* e^x*) (car v' est de la forme u'/u). Cette étape décrite ici ne doit pas paraître sur vote copie, mais il est indispensable de la faire au brouillon !!!*

Intégrons par partie :

$\int_0^1 g(x).dx = \int_0^1 x.\frac{e^x}{1+e^x}.dx = [x.\ln(1+e^x)]_0^1 - \int_0^1 1.\ln(1+e^x).dx = \ln(1+e)-0-\int_0^1 \ln(1+e^x).dx = \ln(1+e)-\int_0^1 h(x).dx$.

6° Encadrons $\int_0^1 g(x).dx$:

$\ln(2)+1/4 \leq \int_0^1 h(x).dx \leq \ln(\sqrt{2(1+e)})$, d'où : $-\ln(\sqrt{2(1+e)}) \leq -\int_0^1 h(x).dx \leq -(\ln(2)+1/4)$, et:

$\ln(1+e)-\ln(\sqrt{2(1+e)}) \leq \ln(1+e)-\int_0^1 h(x).dx \leq \ln(1+e)-\ln(2)-1/4$, et finalement, on obtient :

$\ln(\sqrt{\frac{1+e}{2}}) \leq \int_0^1 g(x).dx \leq \ln(\frac{1+e}{2})-1/4$.

Faire une valeur approchée est recommandée dans le cas d'encadrements comme celui-ci, même si elle n'est pas demandée, car elle est plus "parlante" qu'avec l'emploi du logarithme népérien, et c'est finalement l'objectif final du problème. Vous faîtes alors preuve de pertinence et de compréhension du problème posé, ce qui peut influencer le correcteur en bien… Cependant, si vous étiez amené à reprendre l'encadrement, il vous faudrait le faire avec les valeurs exactes (aussi valable pour la Physique) ! Les valeurs approchées que vous donnez ne sont qu'accessoires et n'a qu'un but informatif.

En valeurs approchées, on obtient :

$0.31 \leq \int_0^1 g(x).dx \leq 0.37$.

Ainsi s'achève le chapitre "ANALYSE"…

Ce qu'il est essentiel de retenir est que les problèmes de Bac abordent dans 99% des cas des études de fonctions comprenant de l'exponentielle et du logarithme népérien. Il est donc essentiel de connaître et de maîtriser leurs propriétés respectives. Les énoncés sur les limites doivent être sus, et leurs applications rapides. La recherche de dérivées doit se faire sans hésitation, et la recherche de primitives (plus difficile) doit être obligatoirement suivie (au brouillon) d'une vérification (en la dérivant et en comparant avec la fonction dont on cherche la primitive). Enfin, pour ce qui est de l'étude de fonctions, les tableaux de variations sont primordiaux! Le maniement des intégrales ainsi que de leurs propriétés élémentaires doit être excellent ; quant à l'intégration par parties, seul des exercices vous permettront de ne pas perdre trop de temps dans la recherche de u, v, u' et v'.

En ce qui concerne les exercices, quelques'uns se posent sur les équations différentielles… Il suffit d'avoir fait plusieurs exercices, et vous vous rendrez compte que ceux-ci se ressemblent beaucoup… Un peu de pratique (non excessive) suffira donc. Quant aux suites, hormis des propriétés (peu nombreuses et faciles) à savoir, seule la pratique pourra vous permettre d'étudier plusieurs cas de figure et donc de bien vous préparer.

Enfin, la calculatrice est très utile pour vérifier ses résultats (ce qui doit être fait presque automatiquement dans le cas d'un doute), mais elle ne fait que des calculs, et ce n'est pas elle qui vous fournira les raisonnements… De plus, l'éducation Nationale a de plus en plus tendance à supprimer l'emploi de calculatrices le jour du bac, donc à n'utiliser qu'en tant qu'outil !

ALGEBRE GEOMETRIE

Chapitre 2

I. Equation, système d'équations linéaires.

Dans cette partie, nous allons aborder diverses méthodes de résolution pour les équations, les inéquations ainsi que les systèmes d'équations. Etant donné que les deux premiers cas ont été étudié dans les classes antérieures de nombreuses fois, je ne ferais qu'un rappel sur les équations bicarrées. Pour ce qui est des systèmes d'équations, nous nous pencherons sur la méthode du pivot de Gauss.

En ce qui concerne la résolution d'une équation simple, si nous sommes face à une variable dont le degré ne dépasse pas deux, il faut appliquer (s'il n'y a pas de formes connues) le discriminant etc. Si le degré de la variable dépasse trois, soit on essaie de factoriser, soit il est possible que ce soit une équation bicarrée. On reconnaît facilement cette dernière, car tous les degrés de la variable sont pairs, et, en général, cette équation est du type : $a.x^4 + b.x^2 + c = 0$. Pour résoudre une telle équation, on pose $X = x^2$. L'équation initiale devient : $a.X^2 + b.X + c = 0$. Nous sommes alors face à quelque chose que l'on sait résoudre en X. Enfin, pour trouver les solutions, on repasse en x. Pour illustrer cette théorie, faisons un exemple :

Exemple :

Considérons l'équation (E) : $3.x^4 + 2.x^2 = 1$. Résoudre (E) sur $\Re$.

Pour cela, revenons à la forme explicitée dans le paragraphe précédent :

(E) : $3.x^4 + 2.x^2 - 1 = 0$

On reconnaît une forme bicarrée, donc on pose : $X = x^2$. (E) devient :

(E) : $3.X^2 + 2.X - 1 = 0$.

Résolvons cette équation en X :

$\Delta = 4-4*(-1)*3 = 16$, donc on a :

$X_1 = \frac{-2-\sqrt{\Delta}}{2.3} = \frac{-2-4}{6} = -1$ et $X_2 = \frac{-2+\sqrt{\Delta}}{2.3} = \frac{-2+4}{6} = \frac{1}{3}$.

Or, on veut résoudre initialement l'équation (E) en x. Comme $X = x^2$, X est donc positif. Donc la solution proposée en X_1 ne convient pas :

$X_1 = x^2 \Leftrightarrow x^2 = -1 \Leftrightarrow S = \{\varnothing\}$

$$X_2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ x_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est donc : $S = \{ \frac{\sqrt{3}}{3} ; -\frac{\sqrt{3}}{3} \}$.

A présent, étudions la résolution de systèmes. Deux cas de figures apparaissent : soit le système à résoudre est dans une configuration simple, c'est-à-dire qu'une combinaison simple entre quelques lignes ou une substitution suffira pour le résoudre, soit les équations sont plus compliquées, et dans ce cas, il reste la méthode du pivot de Gauss.

Dans tous les cas, le but de l'opération est la simplification d'un système en le transformant en un système équivalent facile à résoudre. La méthode du pivot de Gauss (que je vais détailler ci-après) est une méthode sûre, mais elle est aussi la plus fastidieuse et donc la plus longue. Aussi, il ne faut pas hésiter à vérifier que l'on ne peut pas, au moyen d'une substitution ou d'une combinaison, simplifier au maximum le système initial. Intéressons-nous ainsi à la méthode du pivot de Gauss.

Cette méthode consiste en fait à transformer le système initial en un système équivalent de forme triangulaire. Nous prendrons, en tant que système théorique, le système (S) suivant :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1.x_1+b_1.x_2+c_1.x_3+\ldots\ldots = A \\ a_2.x_1+b_2.x_2+c_2.x_3+\ldots\ldots = B \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_8.x_1+b_8.x_2+c_8.x_3+\ldots\ldots = H \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_1'.x_1+b_1'.x_2+c_1'.x_3+\ldots\ldots\ldots\ldots = A' \\ \qquad b_2'.x_2+c_2'.x_3+\ldots\ldots\ldots\ldots = B' \\ \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad h_8'.x_8 = H' \end{cases}$$

Le deuxième système formé est celui auquel on désire aboutir. Quant à $a_1,\ldots,a_8, b_1,\ldots,h_8$, $a_1',\ldots,h_8'$, ce sont des coefficients réels, et $x_1,\ldots,x_8$, ce sont les variables que l'on cherche.

- *première étape :* on intervertit la ligne contenant le plus petit coefficient non nul entre $a_1,\ldots,a_8$ avec la première ligne.
- *deuxième étape :* à l'aide de la "nouvelle" première ligne, en ne faisant que des combinaisons, on élimine les coefficients en $a_?$. On obtient alors un système où seule la première ligne contient la variable x_1 (cette étape se fait généralement en deux parties).
- *troisième étape :* on réitère le procédé aux sept autres lignes en s'attachant aux coefficients $b_?$.
- *quatrième étape :* on fait de même jusqu'à la dernière ligne qui ne doit comporter qu'une seule variable.
- *cinquième étape :* on résout la dernière ligne, puis l'avant-dernière, … jusqu'à la première.

Avant toutes choses, il faut bien vérifier qu'il y a autant d'équations que d'inconnues (voire plus) pour espérer pouvoir trouver une solution. Sinon, on aura des équations dites "de comptabilité", équations qui relient différentes variables entre elles.

Rappelons brièvement les opérations élémentaires. Celles-ci doivent être appliquées avec précision si l'on veut avoir toutes les chances d'obtenir un système équivalent. Ce sont :
1° $L_i \leftrightarrow L_j$ (on échange les lignes L_i et L_j) ;
2° $L_i \leftarrow \lambda.L_i$ (on multiplie la ligne L_i par un réel non nul λ) ;
3° $L_i \leftarrow L_i + \lambda.L_j$ (on additionne à la ligne L_i la ligne L_j multipliée par λ)

Remarque :

En ce qui concerne la dernière opération exposée, L_i n'a pas été multiplié ! Faire une opération du type $L_i \leftarrow \lambda.L_i + \beta.L_j$ entraîne un grand risque de ne pas obtenir au final un système équivalent. Pour réaliser une telle opération, il faudra d'abord multiplier la ligne L_i par λ, puis faire l'opération : $L_i \leftarrow L_i + \beta.L_j$.

Un dernier conseil très important… Que vous arriviez au résultat par la méthode du pivot de Gauss ou une autre méthode, il est vivement conseillé de vérifier les solutions obtenues ! En effet, si vote système "transformé" n'est pas équivalent à l'initial (ce qui arrive fréquemment), il pourrait apparaître des solutions qui ne conviennent pas. Une vérification à la calculatrice est rapide. N'hésitez pas à la faire !

Etudions dès à présent un exemple de résolution par le pivot de Gauss.
Considérons le système (S) suivant :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y-z=0 \\ -2x+y+z=3 \\ x+2y+z=1 \end{cases}$$

On met le coefficient le plus simple et non nul de tous ceux qui sont devant x en première position.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z=1 \\ -2x+y+z=3 \quad (L_1 \leftrightarrow L_3) \\ 3x-2y-z=0 \end{cases}$$

On élimine tout ce qui est en "x" dans les deuxième et troisième lignes par des combinaisons.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z=1 \\ -2x+y+z=3 \\ 3x-2y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z=1 \\ -2x+y+z+2x+4y+2z=3+2 & L_2 \leftarrow L_2+2.L_1 \\ 3x-2y-z-3x-6y-3z=0-3 & L_3 \leftarrow L_3-3.L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z=1 \\ 5y+3z=5 \\ -8y-4z=-3 \end{cases}.$$

On simplifie au maximum le nouveau système obtenu pour simplifier les opérations qui suivront, tout en alignant les "y" et les "z" pour que ce soit bien visible (ici, peu de modification supplémentaire).

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+\ 2y+\ z=1 \\ \boxed{\begin{matrix} 5y+3z=5 \\ 8y+4z=3 \end{matrix}} \end{cases}.$$

On ne s'attache maintenant qu'au système encadré ci-dessus (on récriera cependant toutes les lignes du système, même si elles ne nous servent pas immédiatement), et on répète ce que l'on a fait auparavant, mais avec les "y" cette fois-ci. On met donc le coefficient le plus simple et non nul de tous ceux placés devant les y, que l'on place en deuxième ligne (ici, c'est déjà fait).

Dans l'objectif de supprimer le terme en y dans la troisième ligne, on fait l'opération : $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{8}{5} L_2$.

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z=1 \\ 5y+3z=5 \\ 8y+4z-\frac{8}{5}.5y-\frac{8}{5}.3z=3-\frac{8}{5}.5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z=1 \\ 5y+3z=5 \\ -\frac{4}{5}.z=-5 \end{cases}$$

On n'hésite pas, là encore, à bien afficher le système sous forme triangulaire pour une meilleure visibilité, ainsi qu'à simplifier d'éventuelles équations (signe, coefficient multiplicatif près…) :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z=1 \\ 5y+3z=5 \\ \frac{4}{5}.z=5 \end{cases}$$

Enfin, on résout la dernière ligne (une équation, une inconnue) et on remonte aux lignes précédentes :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z=1 \\ 5y+3z=5 \\ z=\frac{25}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z=1 \\ 5y+3.\frac{25}{4}=5 \\ z=\frac{25}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z=1 \\ y=-\frac{11}{4} \\ z=\frac{25}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2.(-\frac{11}{4})+\frac{25}{4}=1 \\ y=-\frac{11}{4} \\ z=\frac{25}{4} \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{4} \\ y=-\frac{11}{4} \\ z=\frac{25}{4} \end{cases}$$

Nous avons résolu le système (S)… Cependant, il nous reste à vérifier l'exactitude du résultat :

$$\begin{cases} 3.\frac{1}{4}-2.(-\frac{11}{4})-\frac{25}{4}=0 \\ -2.\frac{1}{4}+(-\frac{11}{4})+\frac{25}{4}=3 \\ \frac{1}{4}+2.(-\frac{11}{4})+\frac{25}{4}=1 \end{cases}$$
, donc la solution du système est bien celle proposée : $S = \{ (\frac{1}{4}; -\frac{11}{4}; \frac{25}{4}) \}$.

Avant de terminer cette partie de résolution d'équations, revenons brièvement sur les équations de comptabilité. Si, par exemple, après avoir appliqué la méthode du pivot de Gauss jusqu'à la dernière ligne, celle-ci contient plus d'une variable, cette équation est dite équation de comptabilité. Dans ce cas, il est d'usage de laisser dans le membre de gauche une seule variable, et de mettre les autres dans le membre de droite. Ces dernières jouent alors le rôle de "paramètres", c'est-à-dire qu'on fait comme si elles étaient égales à des constantes, et ce jusqu'à la fin de la résolution. A la fin, le système doit être présenté comme suit : pour toutes les lignes, les membres de gauche des égalités ne doivent contenir qu'une seule variable autre que celles prises en tant que paramètres, et les membres de droites doivent contenir des constantes ainsi que des variables prises comme paramètres (voir l'exemple donné ci-dessous).

$$\begin{cases} x=3+2t+5u \\ y=3t \\ z=5u-1 \end{cases}$$
et, ici, les paramètres sont t et u. On n'a alors une infinité de solutions (car dépendantes de t et u) que l'on note : $S = \{ (t,u) \in \Re^2 / \begin{cases} x=3+2t+5u \\ y=3t \\ z=5u-1 \end{cases} \}$

II. Nombres complexes.

Nous allons aborder dans cette partie un nouvel ensemble de nombres. Nous avons d'abord connu l'ensemble des entiers naturels (N), puis celui des entiers relatifs (Z), des décimaux (D), des rationnels (Q), et enfin des réels (R). Un ensemble supplémentaire va s'ajouter : celui des complexes (C).

Vous allez pouvoir constater que celui-ci n'est pas fondamentalement différent de celui des réels, mais il a cela de plus qu'il lui a été attribué un *nombre* qui n'en est pas un : i. Nous allons ainsi donner la définition de l'ensemble des complexes, accompagnée de définitions de termes propres à cet ensemble. Nous continuerons ensuite en énonçant diverses propriétés élémentaires tout en passant par des représentations graphiques…

L'ensemble $\mathbb{C}$:

On admet l'existence d'un ensemble $\mathbb{C}$, appelé ensemble des nombres complexes tel que tout élément de $\mathbb{C}$ s'écrive sous la forme : $z = a + ib$, où a et b sont réels, et i un élément de $\mathbb{C}$ tel que $i^2 = -1$.

Opération sur les nombres complexes :

Soient a, b, a', b' quatre réels.

- *addition :* $(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$
- *multiplication :* $(a + ib).(a' + ib') = (a.a'-b.b') + i(a'b + ab')$

Définition :

Soit z un nombre complexe tel que $z = a + ib$, avec a et b réels.

a est appelée partie réelle de z. On note : $Re(z) = a$.
b est appelée partie imaginaire de z. On note : $Im(z) = b$.
le nombre complexe $\bar{z} = a-ib$ est appelé le conjugué de z .

Remarque :

Si $a = 0$, z est imaginaire pur.
Si $b = 0$, z est un réel.
Dans toutes ces définitions, a et b sont réels !
Le conjugué de i est $-i$.

Donnons quelques propriétés pour pouvoir trouver les parties réelles et imaginaires d'un complexe.

<u>Propriétés :</u>

- Re(z) = $\frac{z+\bar{z}}{2}$ et Im(z) = $\frac{z-\bar{z}}{2i}$;
- z est réel ssi $\bar{z}=z$;
- z est imaginaire pur ssi $\bar{z}=-z$;
- $\overline{z+z'}=\bar{z}+\overline{z'}$, et $\overline{z.z'}=\bar{z}.\overline{z'}$;
- si z est non nul, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$.

Même si les nombres complexes peuvent sembler difficiles à représenter graphiquement (du fait de la présence de i), mais en adoptant une convention spéciale, elle devient très simple.

<u>Définition :</u>

A tout nombre complexe z = a + ib (avec a et b réels !), on associe le point M(a,b), et réciproquement. On dit alors que M (ou le vecteur $\overrightarrow{OM}$) est l'image de z, et que z est l'affixe de M (ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$).

<u>Remarque :</u>
Dans les réels, l'affixe correspond (vocabulairement) aux coordonnées d'un point
En réalité, la partie réelle de z représente l'abscisse, tandis que la partie imaginaire représente l'ordonnée du point M.

Passons à présent à tout ce qui concerne le *module*, sa définition, sa représentation graphique…

<u>Définition :</u>

Soit z = a + ib un nombre complexe, avec a et b réels.
Le module de z, noté $|z|$, est le réel positif défini par : $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$.

<u>Remarque :</u>
Nous pouvons constater que la notation du module est la même que celle associée à la valeur absolue. Ces "applications" ne sont en effet pas très différentes, comme nous allons le voir dans la suite (on pourra éventuellement faire des rapprochements)…

Donnons quelques propriétés sur le module.

Propriétés :

- $|z|^2 = z.\bar{z}$;
- $z = 0$ ssi $|z| = 0$;
- $|z| = |\bar{z}|$;
- $|z.z'| = |z|.|z'|$;
- si $z \neq 0$, $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$;
- *inégalité triangulaire :* $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

Signification graphique :

- Le module de z : $|z|$ représente graphiquement la distance $\|\overrightarrow{OM}\|$, avec O l'origine du repère et M l'image de z ;
- $\bar{z}$ est l'affixe du symétrique de M par rapport à l'axe (Ox) ;
- Si M et M' sont les images des nombres complexes z et z', alors z + z' représente l'affixe du point P défini par : $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$
- Si M et M' sont les images des nombres complexes z et z', alors z'-z représente l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MM'}$;
- Par conséquent, $|z-z'| = \|\overrightarrow{MM'}\|$.

Remarques :

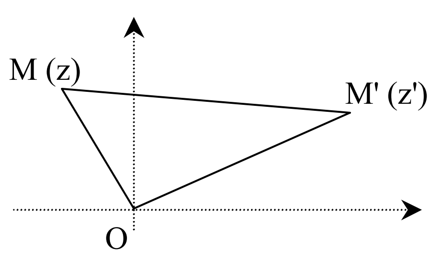
N'hésitez pas à regarder le graphe page suivante.
La définition du module ressemble beaucoup au théorème de Pythagore. Il est donc aisé de penser que le module représente une distance.
Il ne faut pas confondre $|z|^2$ et z^2 (voir la première formule explicitée sur cette page).
Etant donné que le module représente une distance (la distance séparant Lyon de Paris est la même que celle séparant Paris de Lyon…), $|z-z'| = |z'-z|$.

Il est logique que z'-z est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MM'}$. En effet, z'-z est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'}$.

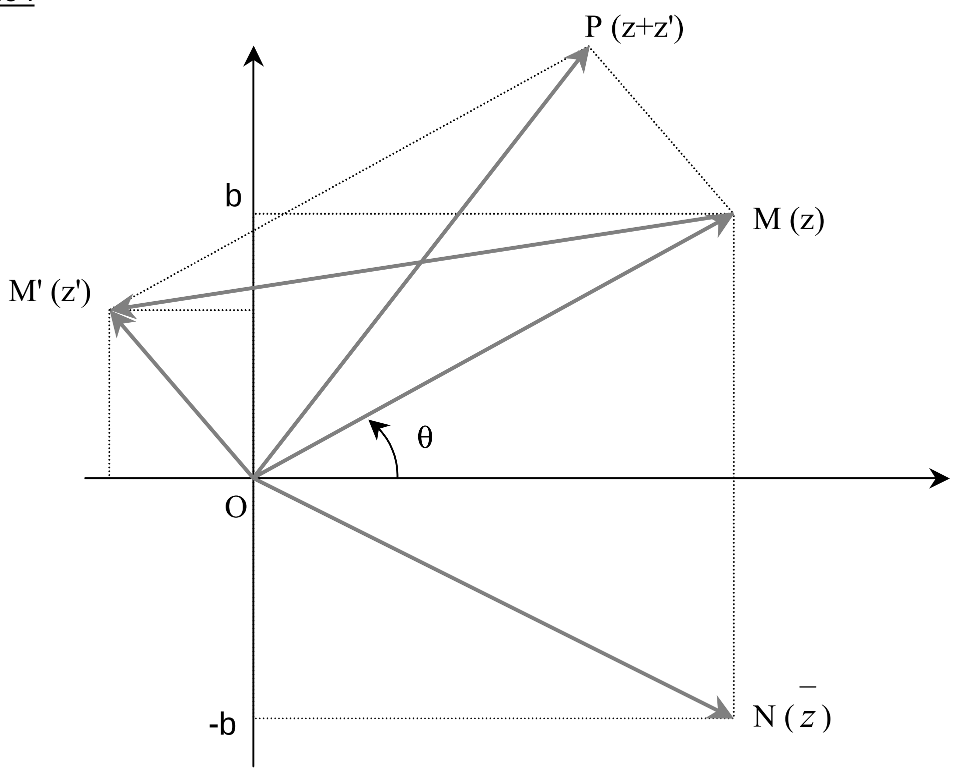
L'inégalité triangulaire se retrouve facilement à l'aide d'un schéma sous forme de triangle (voir ci-contre) :

$$MM' \leq OM + OM'$$

(nous aurons égalité si O, M et M' sont alignés avec O au centre)



Graphique :



Nous avons diverses possibilités pour repérer un point dans un espace. Dans le plan, nous utilisons principalement les coordonnées cartésiennes (O,x,y). Nous allons aborder dans la suite un autre système de coordonnées, qui sont les coordonnées polaires. On ne repère plus alors un point par son abscisse et son ordonnée, mais par un angle et un module. Cet angle s'appelle l'*argument*.

Définition :

Soit z un nombre complexe non nul, et M son image dans le plan.
L'argument de z est une mesure en radian (notée le plus souvent θ) de l'angle orienté $(\vec{u},\overrightarrow{OM})$. Il est noté arg(z) et est défini à 2kπ près (comme tout angle).

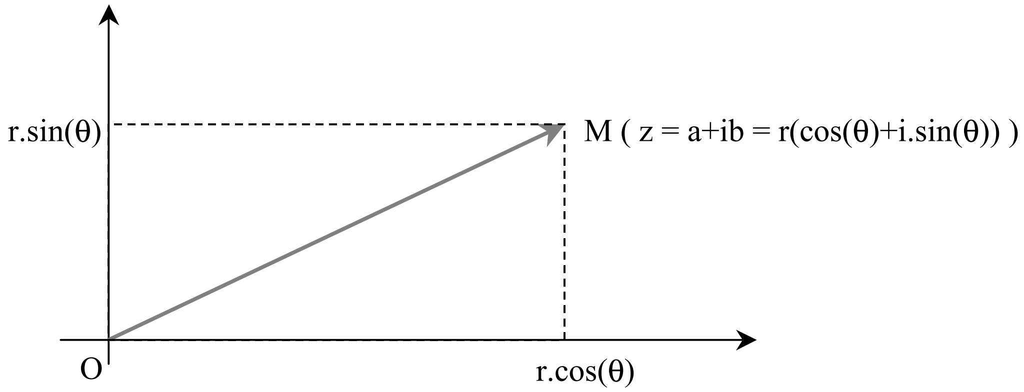
remarques :

θ a été noté dans le schéma ci-dessus, où il est l'argument de z.
L'angle définit une direction, et le module une distance. Etant donné que nous sommes dans deux dimensions et que l'on a deux paramètres (bien choisis), les points sont donc totalement déterminés.

Définition :

On appelle forme trigonométrique d'un nombre complexe z la forme écrite suivante :
$z = |z|.(\cos(\theta) + i.\sin(\theta)) = r.(\cos(\theta) + i.\sin(\theta))$ (avec r le module de z).

rapprochement des deux systèmes de coordonnées :



Rapprochons ces systèmes de coordonnées :

Propriétés :

$r = \sqrt{a^2+b^2}$; $a = r.\cos(\theta)$; $b = r.\sin(\theta)$; $\cos(\theta) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\sin(\theta) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Nous pouvons également émettre des conditions sur z pour en savoir des caractéristiques.

Propriétés :

- z est réel ssi z = 0 ou $\arg(z) \equiv 0\ [\pi]$, c'est-à-dire $\arg(z) = 0 + k\pi$ (k entier) ;
- z est imaginaire pur ssi z = 0 ou $\arg(z) \equiv \pi/2\ [\pi]$, c'est-à-dire $\arg(z) = \pi/2 + k\pi$;
- pour tout nombre complexe z non nul : $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$ et $\arg(-z) = \arg(z) + \pi$;
- pour tous complexes z, z' non nuls :

$$\arg(z.z') = \arg(z) + \arg(z') \text{ et } \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \ ;$$

- si z_A, z_B et z_C sont les affixes des points A, B et C avec $A \neq B$ et $A \neq C$, alors :

$$\arg \frac{z_c - z_a}{z_b - z_a} \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\ [2\pi] .$$

Certaines de ces formules peuvent en rappeler d'autres sur la fonction exponentielle. Introduisons par conséquent la forme exponentielle d'un complexe.

Définition :

Considérons un nombre complexe z, et notons r son module et θ son argument. z peut alors s'écrire sous forme exponentielle : $z = r.e^{i\theta}$

Remarques :

Il faut noter que $e^{i.\theta} = \cos(\theta) + i.\sin(\theta)$. La forme exponentielle est ainsi très proche de la forme trigonométrique.

Le terme $e^{i.\theta}$ n'est qu'une exponentielle dont l'exposant est complexe. On pourra donc lui attribuer les propriétés qui ont été énoncées page 8 (nous allons nous en servir dans les propriétés suivantes).

Propriétés :

Soient r, r', θ, θ' des réels (r et r' sont strictement positifs).

- $r.e^{i\theta} = r'.e^{i\theta'}$ ssi $\begin{cases} r = r' \\ \theta \equiv \theta' \, [2\pi] \end{cases}$;
- $r.e^{i\theta}.\, r'.e^{i\theta'} = rr'.\, e^{i(\theta+\theta')}$;
- $\dfrac{r.e^{i\theta}}{r'.e^{i\theta'}} = \dfrac{r}{r'}.e^{i(\theta-\theta')}$.

Nous pouvons également donner deux formules très connues (donc à savoir), qui sont :

Formule d'Euler :

$\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$, et $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$.

Formule de Moivre :

$(\cos(\theta) + i.\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i.\sin(n\theta)$.

Remarques :

La première formule est facile à retrouver : il suffit d'écrire $e^{i.\theta}$ et $e^{-i.\theta}$. Il ne faut pas oublier le "i" au dénominateur pour le sinus !

La seconde se démontre facilement : $(\cos(\theta) + i.\sin(\theta))^n = (e^{i.\theta})^n = e^{i.n\theta} = \cos(n\theta) + i.\sin(n\theta)$.

Enfin, pour en finir avec l'exponentielle complexe, caractérisons une rotation en complexe :

La rotation de centre O et d'angle α se traduit en complexe par : $e^{i.\alpha}.z$. En effet, si on écrit z sous forme exponentielle ($z = r.e^{i.\theta}$), $e^{i.\alpha}.z = r.e^{i.(\alpha+\theta)}$, et l'argument de ce nombre complexe se trouve alors être ajouté de α, d'où une rotation de centre O (le module ou le rayon, r, ne varie pas).

L'introduction de ce nouvel ensemble ainsi que de ses définitions et propriétés (surtout $i^2 = -1$) conduit à de nouvelles voies pour la résolution de problèmes jusqu'alors insolubles. Nous allons nous attacher à deux d'entres eux : la résolution d'une équation du second degré à discriminant négatif, ainsi que la résolution des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients réels.

Commençons donc par l'étude des équations du second degré :

Théorème :

Considérons l'équation (E) : $ax^2 + b + c = 0$ (a, b et c sont des réels avec a non nul), et notons $\Delta = b^2-4ac$ son discriminant.

- *premier cas :* $\Delta > 0$. Dans ce cas, les solutions de (E) sont :
  $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- *deuxième cas :* $\Delta = 0$. Dans ce cas, les solutions de (E) sont confondues, et :
  $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ (il suffit de remplacer dans x_1 et x_2 avec $\Delta = 0$!).
- *troisième cas :* $\Delta < 0$. Dans ce cas, les solutions de (E) sont :
  $x_1 = \dfrac{-b-i.\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+i.\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Remarques :

Le dernier cas est identique aux deux précédents. En fait, les solutions de (E) sont complexes si le discriminant est strictement négatif. Cette équation n'a pas de solution réelle. Nous pouvons de même noter que ces solutions sont conjuguées si les coefficients de (E) sont réels.

Dans $\Re$, la racine d'un nombre strictement négatif n'existe pas, mais elle existe dans les complexes ! En effet, prenons un exemple : cherchons, dans $\mathbb{C}$, la racine de –9 :

$-9 = -1.9 = i^2.9 = i^2.3^2 = (3i)^2$, d'où : $\sqrt{(-9)} = \sqrt{(3i)^2} = \pm 3i = \pm i.\sqrt{-(-9)}$ (voir solutions théoriques dans l'encadré ci-dessus). Attention! Cet exemple n'a rien de rigoureux : il montre seulement quelques possibilités envisageables grâce à ce nouvel ensemble…

Ces précisions faites, nous pouvons aborder les équations différentielles linéaires homogènes du second ordre à coefficients réels. Là encore, trois possibilités vont s'offrir à nous. En fait, elles découlent de ce que nous venons de voir.

Pour la résolution de ces équations différentielles du type $ay'' + by' + c = 0$, on leur associe une équation caractéristique, qui est ici : $ar^2 + br + c = 0$. Cette équation est très importante !

Théorème :

- Si l'équation caractéristique de l'équation différentielle admet deux racines réelles distinctes r1 et r2 ($\Delta > 0$), alors les solutions sont : $\{x \mapsto A.e^{r1.x} + B.e^{r2.x}, (A,B) \in \Re^2\}$.
- Si l'équation caractéristique de l'équation différentielle admet une racine double r ($\Delta = 0$), alors les solutions sont : $\{x \mapsto (A.x + B).e^{r.x}, (A,B) \in \Re^2\}$.
- Si l'équation caractéristique de l'équation différentielle admet deux racines complexes conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ ($\Delta < 0$), alors les solutions sont :
  $\{x \mapsto (A.\cos(\beta x) + B.\sin(\beta x)).e^{\alpha.x}, (A,B) \in \Re^2\}$.

Remarque :

Tout comme il l'a déjà été dit pages 14 et 15, il faudra deux conditions initiales pour obtenir l'unicité de la solution. Elles permettront de constituer un système de deux équations à deux inconnues…

Nous pouvons maintenant débuter la dernière partie du chapitre "Algèbre, Géométrie" qui traite des barycentres, du calcul vectoriel et d'un peu de géométrie.

III. Calcul vectoriel et géométrie.

Nous nous attacherons en premier lieu à l'étude des barycentres, puis au calcul vectoriel (incluant les produits scalaire et vectoriel…) ce dernier étant couplé avec de la géométrie (représentation paramétrique d'une droite, équation cartésienne d'un plan…).

Théorème :

Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ n points de l'espace ou du plan, et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ des réels.

- Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$, alors le vecteur $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$ ne dépend pas du point M ;
- Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$, alors il existe un unique point G tel que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$. G est alors appelé le barycentre des points pondérés $((A_1, \alpha_1);\dots;(A_n, \alpha_n))$.

Remarques :

Dire que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$ ne dépend pas du point M signifie que ce vecteur est un vecteur constant, comme, par exemple, $\overrightarrow{A_2A_5}$ …

On peut aussi dire que G est le barycentre des points $A_1, \dots, A_n$ affectés des coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Le barycentre peut être perçu physiquement comme un centre de gravité. Ainsi, plus un point aura de poids, plus le barycentre se rapprochera de ce point. Si un coefficient est négatif, on peut interpréter cela comme un poids "inverse", comme si on "levait"ce point du doigt…

propriété :

On ne change pas le barycentre de n points pondérés en multipliant chaque coefficient par le même réel non nul.

Ainsi, si G est le barycentre de ((A,2);(B,8);(C;6)), il sera aussi le barycentre de ((A,1);(B,4);(C;3)).

<u>Propriété :</u>

On ne change pas le barycentre de n points pondérés en remplaçant p d'entre eux par leur propre barycentre, affecté de la somme de leurs coefficients.

Explicitons la formule donnant les coordonnées d'un barycentre :

<u>Coordonnées d'un barycentre :</u>

Considérons des points A_i ayant pour coordonnées (x_i,y_i,z_i), et affectons-les de poids α_I tels que $\sum_i \text{á}_i$ soit non nulle. Alors G a pour coordonnées :

$$x_G = \frac{\sum_i \text{á}_i.x_i}{\sum_i \text{á}_i} \; ; \; y_G = \frac{\sum_i \alpha_i.y_i}{\sum_i \alpha_i} \; ; \; z_G = \frac{\sum_i \alpha_i.z_i}{\sum_i \alpha_i} .$$

<u>Remarque :</u>

$\sum_i \text{á}_i$ représente la masse totale du système.

Par les propriétés suivantes, donnons une représentation paramétrique d'une droite.

<u>Propriétés :</u>

Soient A, B et C trois points non confondus ni alignés.

- La droite (AB) est l'ensemble des barycentres de A et B ;
- Un point M appartient à la droite (AB) ssi il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM}=t.\overrightarrow{AB}$;
- Le segment [AB] est l'ensemble des barycentres de A et B affectés de coefficients positifs ;
- Un point M appartient au segment [AB] ssi il existe un réel t appartenant à [0;1] tel que $\overrightarrow{AM}=t.\overrightarrow{AB}$;
- Le plan (ABC) est l'ensemble des barycentres des points A, B et C.

<u>Remarques :</u>

Le barycentre de deux points est donc placé sur la droite passant par ces deux points.
Le barycentre de trois points est donc placé dans le plan contenant ces trois points.
$\overrightarrow{AM}=t.\overrightarrow{AB}$ permet d'avoir une représentation paramétrique de la droite (AB) en traduisant cette égalité avec les coordonnées de M (x,y,z).

Abordons à présent le produit scalaire dans l'espace.

Définition :

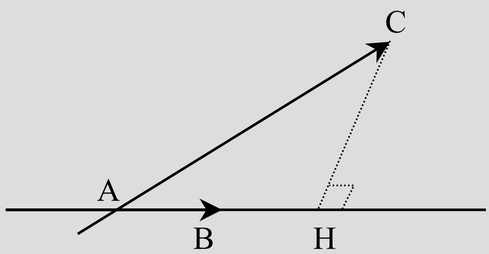
On appelle produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel, noté $\vec{u}.\vec{v}$, défini par :

$$\begin{cases} \text{si } \vec{u}=\vec{0} \text{ ou } \vec{v}=\vec{0},\ \vec{u}.\vec{v}=0 \\ \text{si } \vec{u}\neq\vec{0} \text{ et } \vec{v}\neq\vec{0},\ \vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\vec{u},\vec{v}) \end{cases}$$

On peut énoncer autrement cette définition sous une forme "graphique".

Théorème :

Si A et B ne sont pas confondus et si H désigne le projeté orthogonal de C sur (AB), alors :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AH}$



Remarques :
Ne pas oublier que ce sont des valeurs algébriques !
Le produit scalaire est bien un réel, et non un vecteur.
Par l'expression que nous venons de donner, si (AB) et (AC) sont perpendiculaires et, plus généralement, si deux droites (D) et (D') sont orthogonales, leur produit scalaire sera nul (le projeté H sera en A). De même, si une droite (D) dirigée par le vecteur $\vec{u}$ est perpendiculaire à un plan (P) de base $(\vec{v},\vec{w})$, alors leur produit scalaire sera nul (c'est-à-dire $\vec{u}.\vec{v} = 0$ et $\vec{u}.\vec{w} = 0$). Dans ce cas, le vecteur normal de (P) sera colinéaire au vecteur directeur de (D).

Exprimons analytiquement, dans une base orthonormale, le produit scalaire.

Propriété :

soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{u}'\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs dans un repère orthonormal. Alors :
$\vec{u}.\vec{u}' = x.x' + y.y' + z.z'$

Remarque :
La condition d'orthogonalité vue en première (souvent méconnue) vient donc du produit scalaire.

Après avoir fourni une représentation paramétrique d'une droite, donnons-en une pour le plan, ainsi que l'équation cartésienne d'un plan.

Propriétés :

Plaçons-nous dans un repère orthonormal.

- Le plan passant par le point A et admettant $\vec{u}$ comme vecteur normal est l'ensemble des points M tel que $\vec{u}\,.\,\overrightarrow{AM} = 0$;
- Cette condition se traduit par une équation cartésienne du type $ax + by + cz + d = 0$, avec a, b, c et d des réels ;
- Réciproquement, un plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Remarque :

Le premier point donne une représentation paramétrique d'un plan. L'équation donnée signifie que toutes les droites (AM) orthogonales au vecteur $\vec{u}$ constituent le plan cherché.

Les deux autres points découlent du premier ($\vec{v}\,.\,\vec{w} = x.x'+y.y'+z.z'$).

Enfin, pour conclure cette sous-partie, traitons du déterminant de deux vecteurs ainsi que du produit vectoriel (nous nous attarderons peu sur les déterminants).

Définition :

En supposant le plan orienté, le déterminant du couple de deux vecteurs $(\vec{u},\vec{v})$ est le réel défini par :

$$\begin{cases} \text{si } \vec{u}=\vec{0} \text{ ou } \vec{v}=\vec{0},\ \text{dét}(\vec{u},\vec{v})=0 \\ \text{si } \vec{u}\neq\vec{0} \text{ et } \vec{v}\neq\vec{0},\ \text{dét}(\vec{u},\vec{v})=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\sin(\vec{u},\vec{v}) \end{cases}$$

On peut également donner une autre caractérisation beaucoup plus commode et usuelle.

Propriété :

Plaçons-nous dans une base orthonormale directe, et soit $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ deux vecteurs.

Alors dét $(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad-bc$.

Le calcul du déterminant est très efficace pour prouver la colinéarité.

<u>Propriété :</u>

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi dét $(\vec{u},\vec{v}) = 0$.

Enfin, abordons le produit vectoriel : définition et expression.

<u>Définition :</u>

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace orienté (voir ci-dessous pour l'orientation). Le produit vectoriel, noté $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$, est le vecteur défini par :

si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, $\vec{w} = \vec{0}$;

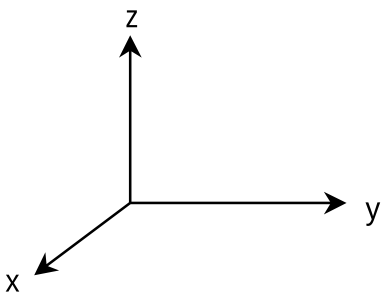
sinon, $\vec{w}$ a les propriétés suivantes : $\begin{cases} \vec{w}.\vec{u} = \vec{w}.\vec{v} = 0 \\ (\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \text{ est une base directe} \\ \|\vec{w}\| = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\sin(\text{è}) \end{cases}$.

<u>Remarques :</u>

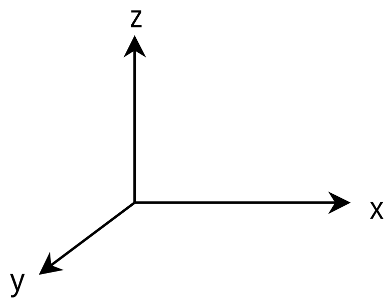
Lorsque l'on a deux vecteurs, leur produit vectoriel permet d'en obtenir un troisième qui leur est orthogonal. De plus, si ces deux vecteurs sont eux-même orthogonaux, on obtiendra alors une base orthogonale de l'espace. Et enfin, si ces deux vecteurs ont une norme de 1, le produit vectoriel sera également de norme 1. Si toutes ces conditions sont réunies, on obtiendra donc une base orthonormale de l'espace.
Contrairement au produit scalaire, le produit vectoriel est un vecteur.

<u>Orientation de l'espace :</u>

En général, on travaille dans un espace orienté dans le sens direct, orientation que l'on peut retrouver avec la règle de la main droite (pouce $\to$ x, index $\to$ y, majeur $\to$ z avec le majeur replié).



sens direct



sens indirect

Une permutation circulaire conserve l'orientation, alors que l'échange de deux vecteurs l'inverse.

Propriétés :

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace orientés, a et b deux réels.

- $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ ssi $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ;
- $\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$;
- $\vec{u} \wedge (a.\vec{v} + b.\vec{w}) = a.(\vec{u} \wedge \vec{v}) + b.(\vec{u} \wedge \vec{w})$;
- $(a\vec{u} + b.\vec{v}) \wedge \vec{w} = a.(\vec{u} \wedge \vec{w}) + b.(\vec{v} \wedge \vec{w})$.

Remarques :

Le premier point, tout comme le déterminant, peut être efficace pour montrer la colinéarité. Si un tel produit vectoriel est nul, ne pas en déduire que l'un des vecteurs est nul !
Les deux derniers points montrent la distributivité à droite et à gauche du produit vectoriel.

Exprimons analytiquement le produit vectoriel.

Propriété :

soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs dans une base orthonormale directe. Alors :

$$\vec{u} \wedge \vec{u'} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y.z' - y'.z \\ x'.z - x.z' \\ x.y' - x'.y \end{pmatrix}$$

Ainsi s'achève le chapitre "ALGEBRE, GEOMETRIE"…

Ce qu'il est essentiel de retenir est tout ce qui concerne les nombres complexes (les propriétés qui ont été énoncé sont primordiales). Seule une grande pratique au travers des exercices vous permettrons d'utiliser facilement les nombres complexes.
Quant à la géométrie, l'usage des barycentres doit être aisé. Les produits scalaire et vectoriel, ainsi que le déterminant, servent non seulement en mathématiques, mais aussi en Physiques (comme beaucoup de choses, d'ailleurs). Ils trouvent souvent leur utilité lorsqu'il faut démontrer soit une colinéarité, soit une orthogonalité. Les (peu nombreuses) formules de ces applications doivent ainsi être sues, à défaut peut-être d'en avoir une vision graphique (pourtant importante), si votre aspect "géométrique" n'est pas votre point fort…

COMBINATOIRE PROBABILITES

Chapitre 3

I. Combinatoire, dénombrements.

Débutons cette partie en donnant des précisions sur un vocabulaire qui est courant dans le combinatoire et les probabilités.

Faisons tout d'abord une distinction importante entre un *ensemble* $\{a_1,\dots,a_p\}$ et un *p-uplet* $(a_1,\dots,a_p)$. En effet, le second est ordonné ($(a_1,a_2,\dots,a_p) \neq (a_2,a_1,\dots,a_p)$), alors que le premier correspond en fait à un sac où tous les éléments sont en vrac…

Lorsque l'on dit qu'un ensemble A est de cardinal *n*, cela signifie que A compte *n* éléments (on note card (A) = n).

Le produit de deux ensembles A et B ne correspond pas à une multiplication. A x B est l'ensemble des couples de la forme (a,b), avec $a\in A$ et $b\in B$. Ainsi, en supposant que card (A) = n et card (B) = m, A x B aura un cardinal de :

$$(a_1,?)\begin{array}{c}(a_1,b_1)\\(a_1,b_2)\\\vdots\\(a_1,b_m)\end{array}\text{(m possibilités)},\ (a_2,?)\begin{array}{c}(a_2,b_1)\\(a_2,b_2)\\\vdots\\(a_2,b_m)\end{array}\text{(m possibilités)},\dots,(a_n,?)\begin{array}{c}(a_n,b_1)\\(a_n,b_2)\\\vdots\\(a_n,b_m)\end{array}\text{(m possibilités).}$$

On obtient au total n schéma de ce type, chacun avec m possibilités. Le cardinal de A x B est donc égal à n.m. On remarquera que A x B et B x A sont deux ensembles différents ! En effet, A x B ne contient pas d'élément du type (b,a), avec $a\in A$ et $b\in B$.

Propriétés :

card (A x B) = card (A).card (B) et donc card (A^p) = card (A) x … x card (A) = n^p .

Avant de poursuivre, adoptons une nouvelle notation, concernant le *factoriel.*

Définition :

Soit n un entier naturel.

$$\begin{cases} \text{si } n=0,\ n!=0!=1 \\ \text{si } n\neq 0,\ n!=n\times(n-1)\ldots 3\times 2\times 1 \end{cases}$$

Définissons à présent l'*arrangement.*

Définition :

Soit A un ensemble composé de n éléments ($n\geq 1$).
Un arrangement de p éléments de A ($1\leq p\leq n$) est un p-uplet formé d'éléments de A deux à deux distincts. On note A_n^p le nombre d'arrangements différents et possibles différents de p éléments de A.

Propriété :

$$A_n^p = n.(n-1) \ldots (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Essayons de se convaincre de ce résultat : Nous avons n éléments dans A, et nous devons "remplir" un p-uplet ($1\leq p\leq n$) avec des éléments de A tous deux à deux distincts. En première position, nous avons donc le choix entre n possibilités. Pour la deuxième, il ne nous en reste plus que (n-1). Ainsi, pour les deux premières places, nous avons n.(n-1) choix. Pour la troisième position, il nous reste (n-2) possibilités; donc au total, n.(n-1).(n-2)… Et ceci jusqu'à la dernière position, où il nous restera un choix parmi (n-p + 1)possibilités. Au final, pour remplir un p-uplet avec des éléments tous distincts parmi un ensemble comprenant n éléments, on aura bien $n.(n-1) \ldots (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$ possibilités.

Abordons à présent le terme de *permutation*.

Définition :

Une permutation de A est un arrangement des n éléments de A. On permute ainsi tous les éléments de l'ensemble.

remarque :
une permutation n'est donc qu'un cas particulier de l'arrangement, avec p = n.

Propriété :

Le nombre de permutations de A est : $A_n^n = \dfrac{n!}{(n-n)!} = \dfrac{n!}{0!} = n!$

Attachons-nous maintenant aux *combinaisons* : définition et relations.

Définition :

Soient A un ensemble de n éléments (n non nul), et p un entier tel que : $1 \leq p \leq n$.
On appelle combinaison de p éléments de A toute partie de A de cardinal p. L'ordre des éléments n'intervient pas. Le nombre de combinaisons de p éléments de A (dont le cardinal est) n est noté : C_n^p.

Remarques :
Il est important de noter qu'à la différence des arrangements, l'ordre n'intervient pas. Les combinaisons ne sont donc pas des p-uplets.
Que ce soit pour les arrangements ou les combinaisons, le cardinal de l'ensemble A est toujours noté en indice et non en exposant. Pour s'en souvenir, on peut dire que n est toujours plus grand que p, et est donc plus "lourd", donc il est en bas (moyen mnémotechnique débile mais efficace).

Propriétés :

- $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$;
- $C_n^p = C_n^{n-p}$;
- $C_n^0 = C_n^n = 1$, et $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$;
- Pour $n \geq 1$ et $p < n$, $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$.

Remarques :
Il est normal que le nombre de combinaisons soit plus faible que le nombre d'arrangements, car pour ces derniers, les éléments ont un ordre.
Le second point consiste à dire que choisir p éléments sur n, c'est aussi choisir les autres (n-p éléments) qu'on ne prendra pas…

Concluons cette partie en explicitant le binôme de Newton qui permet de donner une expression développée (mise sous forme de somme) de $(a + b)^n$.

Théorème : binôme de newton.

Soient a et b deux nombres réels ou complexes, n un entier naturel.

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \left(C_n^p . a^p . b^{n-p} \right)$$

Remarque :
a et b peuvent être intervertit sans problème, et être réels ou complexes.

Nous pouvons maintenant aborder la toute dernière partie de ce résumé de cours : les probabilités.

II. Probabilités.

Nous allons là encore commencer par définir des termes propres aux probabilités.

Considérons un type d'épreuve (un tirage dans une urne, par exemple). On appelle *univers* l'ensemble supposé fini (noté en général Ω) qui contient tous les résultats possibles. Un *événement* est une partie de Ω (cela correspond à un résultat précis du tirage au sort). L'événement noté ∅ est un événement impossible (exemple : "tirer deux boules identiques", alors que l'urne contient que des boules de couleurs différentes). P(Ω) est l'ensemble des parties de Ω, c'est-à-dire des évènements.

Si A et B sont des évènements, alors $A \cap B$ correspond à l'événement *A et B*, $A \cup B$ correspond à l'événement *A ou B* (pour différencier ces deux notations, on peut penser que $\cup$ ressemble à un "u", que l'on retrouve dans ou, autre moyen mnémotechnique débile mais là encore efficace contre une confusion très courante), $A \cap B = \varnothing$ signifie que les évènements A et B ne peuvent coexister, et sont alors appelés *évènements incompatibles*, et enfin, le complémentaire de A dans Ω, noté $\overline{A}$, est *l'événement contraire de A*.

Ces termes doivent être acquis pour aborder tout problème.

Passons maintenant aux probabilités proprement dites.

Définition :

Une probabilité sur l'univers Ω est une application $p : P(\Omega) \rightarrow \Re$ telle que :
Pour tout $A \subset \Omega$, $0 \geq p(A) \geq 1$; $p(\Omega) = 1$; si $A \cap B = \varnothing$, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

p(A) = 0.5 doit se lire : "la probabilité que l'événement A se réalise est de 0.5, soit 50%".

Pour tout $A \subset \Omega$,il est normal que l'on ait $0 \geq p(A) \geq 1$. En effet, on aurait du mal de croire que la probabilité qu'un événement se produise soit de –15% ou de 320%, par exemple… Il faudra donc toujours faire une vérification rapide de vos résultats par rapport à cette condition nécessaire !

Etant donné que Ω représente l'univers, il est donc normal qu'il se réalise à tous les coups, donc 100% de chances de réussite…

Enfin, "si $A \cap B = \emptyset$, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$" doit se lire : "si les évènements A et B sont incompatibles, alors la probabilité que l'événement soit A, soit B, soit A et B se produise est égal à la somme des probabilités que A se produise et B aussi".

Remarquons que $\cup$ se lit mathématiquement "union", et $\cap$ se lit "inter".

Donnons à présent quelques propriétés sur les probabilités.

<u>Propriétés :</u>

- $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$; en particulier, $p(\emptyset) = 0$;
- si $A \subset B$, alors $p(A) \leq p(B)$;
- si A et B sont deux évènements quelconques, alors :
  $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
- si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des évènements deux à deux incompatibles, alors on a :
  $p(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \ldots + p(A_n)$.

<u>Remarques :</u>

Le premier point correspond à l'idée que si l'événement A a 70% de probabilité de se produire, il a aussi 30% de chance de ne pas se produire. Cette pensée rejoint donc celle de $C_n^p = C_n^{n-p}$ …

Le second point indique que si un événement est plus restreint qu'un autre, la probabilité qu'il de produise est moindre.

Le troisième point est du même type que la formule de Grassmann (☺).

Le dernier point n'est qu'une généralisation de la dernière propriété vue en page précédente.

Traitons à présent la notion de *variable aléatoire* ainsi que les applications courantes.

<u>Définition :</u>

Soit p une probabilité sur Ω. Une variable aléatoire désigne toute application X de Ω dans $\Re$.

<u>Remarque :</u>

On associe cette variable aléatoire à la loi de probabilité énoncée page suivante.

<u>Définition :</u>

La loi de probabilité de X est l'application $\begin{bmatrix} \Re \to [0;1] \\ x \mapsto p(X=x) \end{bmatrix}$.

<u>Remarque :</u>
Déterminer cette loi de probabilité, c'est chercher les valeurs x_1, x_2,…,x_n prises par X, et calculer $p(X = x_i)$ pour tout i. Autrement dit, déterminer cette loi de probabilité, c'est chercher tous les évènements x_i qui peuvent se produire et calculer la probabilité qu'ils se produisent vraiment.
Il ne faudra donc pas hésiter à calculer la somme de ces probabilités pour tout les i, car si le résultat est exact (et complet), cette somme devrait être égale à 1.

A partir de ces définitions, nous pouvons expliciter d'autres fonctions qui constituent parfois une question dans un exercice, sans pour autant aider à la résolution du problème posé par l'énoncé. Elles peuvent toutefois permettre une compréhension accrue des informations données ou trouvées au fil de l'exercice.

<u>Définitions :</u>

- La fonction de répartition de X est l'application F définie sur $\Re$ par :
  $F(x) = p\,(X \leq x)$.
- L'espérance mathématique de X est le réel :
  $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i . p(X = x_i)$.
- La variance est le réel positif :
  $V(X) = E(X-E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i-E(X))^2 . p(X = x_i)$
- L'écart-type de X est le réel :
  $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

<u>Remarques :</u>
La fonction de répartition est donc une fonction en escalier, croissante et à valeurs dans [0;1].
L'espérance mathématique se rapproche du concept des barycentres. C'est en effet une moyenne pondérée des valeurs prises par X. Ainsi, $E(X) = 0$ correspondra à un jeu "équilibré" où on a autant de chance de gagner que de perdre.

Nous pouvons donner quelques propriétés sur l'espérance et la variance.

<u>Propriété :</u>

Soient X et Y deux variables aléatoire, α et β deux réels. L'espérance mathématique est une application linéaire, c'est-à-dire : $E(\alpha X + \beta Y) = \alpha . E(X) + \beta . E(Y)$.

Propriété :

$V(X) = E(X^2)-(E(X))^2$.

Remarque :
Cette propriété donne une formule plus facile à calculer que la définition de la variance elle-même.

Poursuivons avec la notion *d'événements indépendants* ainsi que des formules importantes concernant la probabilité conditionnelle.

Définition :

Soit p une probabilité sur Ω. On dit que deux évènements A et B sont indépendants ssi:
$p(A \cap B) = p(A).p(B)$.

Remarque :
L'indépendance et l'incompatibilité sont deux aspects différents ! L'indépendance signifie que les deux évènements ne sont pas liés, alors que l'incompatibilité signifie qu'ils ne peuvent se produire simultanément.

Définissons et explicitons la probabilité conditionnelle :

Définition :

Soient A et B deux événements, avec $p(B) \neq 0$. La probabilité conditionnelle de A par rapport à B est le nombre :

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}.$$

Remarque :
$p(A/B)$ se lit : "la probabilité que l'événement A se produise sachant que B est réalisé…". On considère, dans ce cas, que B est réalisé, et sachant cette condition, on calcule la probabilité que A se produise, et ce grâce à la formule explicitée ci-dessus.

Caractérisons mathématiquement l'indépendance de deux évènements.

Propriété :

A et B sont indépendants ssi $p(A/B) = p(A)$.

La propriété de la page précédente signifie que le fait que B soit réalisé ou non n'influe pas sur la probabilité qu'a A de se produire. A et B sont donc bien indépendants.

Enfin, abordons une formule pratique, proche de $\sum_i p(X = x_i) = 1$.

Propriété :

Soit B_1, B_2,…,B_n des évènements constituant une partition de Ω, c'est-à-dire dont la réunion est égale à Ω. Alors, pour tout événement A :

- $p(A) = p(A \cap B_1) + p(A \cap B_2) + \ldots + p(A \cap B_n)$;
- pour tout k entier appartenant à [1;n], $p(A \cap B_k) = p(A/B_k).\, p(B_k)$.

Remarque :
Le second point est très proche de la formule concernant la probabilité conditionnelle…

Voici maintenant quelques conseils qui vous permettront de réagir plus facilement aux questions posées. Tout d'abord, il est toujours préférable (quand le cas se présente) de réaliser un arbre ou un tableau pour éclaircir les données du problème et les résoudre sans difficulté.

Retenons également qu'un produit correspond à un arbre, alors qu'une somme signifie que nous sommes en présence de plusieurs cas à considérer (indépendance).

Dans les problèmes de tirages, bien distinguer les tirages simultanés (pas d'ordre, donc emploi des combinaisons C_n^p, voir page 59), les tirages successifs sans remise (ordre avec un nombre d'éléments initiaux en diminution au fur et à mesure qu'on les tire, donc emploi d'arrangements A_n^p, voir page 58) et les tirages successifs avec remise (calcul de n^p, voir page 57).

Il ne faut pas oublier que le résultat des probabilités que vous avez trouvé doivent être compris entre 0 et 1, soit 0% et 100%, sans quoi il y a une erreur…

A ne pas oublier également, le caractère d'indépendance et d'incompatibilité pour les formules pages 60 et 63.

Les rappels de cours sont maintenant terminés. Il nous reste donc l'étude d'exemples. Nous en traiterons deux : le premier est d'une difficulté moyenne, et est construit essentiellement autour des probabilités conditionnelles, alors que le second, plus difficile, s'attache davantage à l'étude de variables aléatoires, espérance…

Comme les fois précédentes, les points "méthode" et "conseil" seront indiqués en *italique*…

Exercice 1 : *exercice complet de Bac année 97.*

Questions.

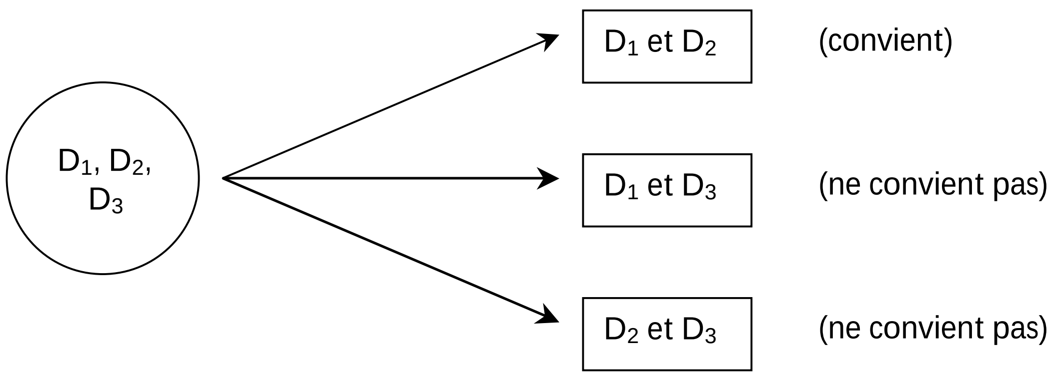
Trois dés cubiques sont placés dans une urne. Deux de ces dés sont normaux : leurs faces sont numérotées de 1 à 6. Le troisième est spécial : trois de ces faces sont numérotées 6, les trois autres sont numérotées 1. On tire de l'urne, simultanément et au hasard, deux dés parmi les trois, et on les lance.
On note A l'événement : "Les deux dés tirés sont normaux".
On note B l'événement : "Les deux faces supérieures sont numérotées 6".

1° a_ Définir l'événement contraire de A, qu'on notera $\overline{A}$.
b_ Calculer les probabilités de A et $\overline{A}$.
2° a_ Calculer p(B/A), probabilité de B sachant que A est réalisé, puis $p(B \cap A)$.
b_ Calculer p(B).
3° Calculer p(A/B), probabilité de A sachant que B est réalisé.

Réponses.

1° a_ *lorsque l'on doit définir un événement contraire, il ne faut pas se contenter de mettre la phrase sous forme négative, car en général, c'est faux. En effet, ici, si on choisit $\overline{A}$ l'événement "les deux dés tirés ne sont pas normaux" ne peut se réaliser, alors $p(\overline{A}) = 0$, et $p(A) + p(\overline{A}) \neq 1$, ce qui est impossible.*
$\overline{A}$, l'événement contraire de A, est : "on a tiré le dé spécial et un dé normal".

b_ *On tire simultanément deux dés parmi les trois situés dans l'urne.*
Le nombre de tirages distincts est : $C_3^2 = \frac{3!}{2!.1!} = 3$.
Etant donné que l'urne ne contient deux dés normaux, il n'y a qu'un tirage favorable à la réalisation de l'événement A ($C_2^2 = 1$), et donc :
$p(A) = 1/3$
On aurait également pu faire un arbre évoquant toutes les possibilités de tirages, vu qu'elles ne sont pas nombreuses. Ainsi, en notant D_1 un dé normal, D_2 l'autre dé normal, et D_3 le dé spécial, on aurait:



Des trois possibilités offertes, seule une convient, d'où $p(A) = 1/3$.

Etant donné que $\overline{A}$ est l'événement contraire de A, on a :

$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$, d'où :

$p(\overline{A}) = 2/3$.

2° a_ Nous devons calculer $p(B/A)$. L'événement A est donc supposé réalisé. On a donc tirer les deux dés normaux. Par conséquent, pour chaque dé, une seule face sur six portant le numéro 6, et comme les deux dés sont indépendants, la probabilité que B se réalise est de :

$p(B/A) = \frac{1}{6}.\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

De plus, d'après le cours, $p(B \cap A) = p(B/A) . p(A)$, d'où :

$p(B \cap A) = (1/36).(1/3) = 1/108$.

La probabilité que l'on tire les deux dés normaux et que l'on ait 6 indiqué sur la face supérieure de ces deux dés est de 1/108.

b_ *Deux possibilités sont envisageables pour cette réponse. Celles-ci sont fournies par les équations suivantes :* $p(A \cap B) = p(A/B) . p(B)$ *et* $p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \overline{A})$ *(puisque* A *et* $\overline{A}$ *forment une partition de* Ω *car ce sont des évènements contraires). La première équation est difficile à trouver, car obtenir la probabilité de A sachant B n'est pas évident, vis à vis de la seconde équation, où il ne faut trouver que la probabilité de B sachant* $\overline{A}$*, ce qui est évident…*

Si l'on sait que l'on a tiré le dé spécial (autrement dit si l'événement $\overline{A}$ s'est produit), la probabilité que les deux faces supérieures portent le numéro 6 est de :

$p(B/\overline{A}) = \frac{1}{2}.\frac{1}{6} = \frac{1}{12}$. (1/2 correspond au dé spécial).

De plus, $p(\overline{A})$ a déjà été calculé précédemment (*quelle coïncidence)* : $p(\overline{A}) = 2/3$. On a donc :

$p(B \cap \overline{A}) = p(B/\overline{A}).p(\overline{A}) = (1/12).(2/3) = 1/18$.

Puisque A et $\overline{A}$ sont des évènements contraires, $B \cap A$ et $B \cap \overline{A}$ sont incompatibles, et ainsi :

$p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \overline{A}) = 1/108 + 1/18 = 7/108$.

La probabilité de l'événement B est de 7/108.

3° $p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{1/108}{7/108} = 1/7$.

La probabilité de A sachant que B est réalisé est donc égale à 1/7.

<u>Exercice 2 :</u> *exercice complet année 97.*

PARTIE A.

<u>Question.</u>

Une urne contient deux boules blanches et n noires, indiscernables au toucher. Un joueur tire simultanément deux boules de l'urne, et on note A_2 l'événement : "le joueur a tiré deux boules blanches".
Déterminer n pour que la probabilité $p(A_2)$ de l'événement A_2 soit égale à 1/15.

Réponse.

Le tirage est simultané, donc nous allons travailler avec des combinaisons. Pour cela, il faut savoir le nombre de boules tirées, soit deux, et le nombre de boules dans l'urne, soit n + 2.
Le joueur tire deux boules dans l'urne qui contient n + 2 boules. Il peut effectuer donc :

$C_{n+2}^{2} = \frac{(n+2)!}{2!\,n!} = \frac{(n+2).(n+1).n!}{2.n!} = \frac{(n+2).(n+1)}{2}$ tirages possibles.

Or, un seul tirage peut permettre de réaliser l'événement A_2. Tous les autres feront tirer au moins une boules noires sur les deux. Par conséquent, on a :

$$p(A_2) = \frac{\text{un seul tirage favorable}}{\text{nombre de tirages possibles}} = \frac{1}{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}.$$

Or, on désire $p(A_2) = 1/15$. Ces deux équations nous donnent donc une équation du second degré à résoudre :

$$\frac{1}{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} = \frac{1}{15} \Rightarrow (n+2)(n+1) = 30$$

$$\Rightarrow n^2 + 3n - 28 = 0$$

Nous pouvons résoudre cette équation par la méthode habituelle (discriminant…) et nous trouverons alors deux solutions : $n_1 = 4$ et $n_2 = -7$. Nous pouvons aussi essayer de mettre l'équation sous forme canonique, c'est-à-dire faire apparaître un facteur au carré… Expliquons cette dernière méthode moins usuelle que la précédente. L'idée est de mettre un terme au carré dans le membre de gauche, ce terme étant choisi de telle sorte qu'il n'y ait plus, hormis dans ce qui a été mis en facteur, de terme en n. Or, dans l'équation initiale, on a $n^2 + 3n$. Ainsi, si on développe $(n + 3/2)^2$, on obtient $n^2 + 3n + 9/4$. C'est donc ce qu'il faut faire.

$$\frac{1}{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} = \frac{1}{15} \Rightarrow (n+3/2)^2 - 9/4 - 28 = 0$$

$$\Rightarrow (n+3/2)^2 - 121/4 = 0$$
$$\Rightarrow (n+3/2)^2 - (11/2)^2 = 0$$
$$\Rightarrow (n+3/2+11/2).(n+3/2-11/2) = 0$$
$$\Rightarrow (n+4).(n-7) = 0$$

Etant donné que n représente un nombre de boules, il doit être un entier positif. En choisissant n = 4, nous aurons bien $p(A_2) = 1/15$.

Partie B.

Questions.

Dans toute la suite du problème, on prend n = 4.
1° Un joueur tire simultanément deux boules, et on note :

A_0 l'événement : "le joueur a tiré deux boules noires".
A_1 l'événement : "le joueur a tiré une boule blanche et une boule noire".
A_2 l'événement : "le joueur a tiré deux boules blanches".

a_ Calculer la probabilité des évènements A_0 et A_1.

b_ Lors de ce tirage, le joueur marque trois points pour chaque boule blanche tirée, et marque deux points pour chaque boule noire tirée.
Soit X le nombre de points marqués.
Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
Déterminer E(X).

2° Après ce premier tirage, le joueur remet les boules noirs tirées dans l'urne, et laisse les boules blanches tirées de côté, puis effectue un nouveau tirage simultané de deux boules.
Soit B_i l'événement : "on obtient i boule(s) blanche(s) lors du deuxième tirage" (i = 0, 1 ou 2).

a_ Donner $p(B_0/A_2)$ et en déduire $p(B_0 \cap A_2)$.
Calculer de même $p(B_0 \cap A_1)$ et $p(B_0 \cap A_0)$.
En déduire que $p(B_0) = 41/75$.

b_ Montrer de même que $p(B_2) = 2/75$.
En déduire $p(B_1)$.

<u>*Réponse.*</u>

1° a_ Puisque l'urne contient 6 boules, dont 4 noires, et qu'on extrait <u>simultanément</u> 2, la probabilité de A_0 est :

$$p(A_0) = \frac{\text{nombre de tirages permettant de tirer 2 boules noires sur 4 disponibles}}{\text{nombre total de tirages (2 boules sur 6)}} = C_4^2 / C_6^2 = 2/5.$$

La probabilité de tirer deux boules noires est de 2/5.

Pour réaliser l'événement A_1, on doit tirer une boule de chaque couleur simultanément (une boule blanche sur deux, et une boule noire sur quatre), d'où :

$$p(A_1) = \frac{C_2^1 \times C_4^1}{C_6^2} = \frac{2.4}{15} = 8/15$$

La probabilité de tirer une boule de chaque couleur est de 8/15.

b_ X est le nombre de points marqués.
Comme il est écrit page 62, déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X, c'est chercher toutes les valeurs que peut prendre X, puis calculer la probabilité pour chacune de ces valeurs.
X peut prendre plusieurs valeurs. A l'issue du tirage, trois cas se présentent :

- 2 boules noires tirées, donc X = 4 ;
- 1 boule blanche et une boule noire sont tirées, donc X = 5 ;
- 2 boules blanches, donc X = 6.

Dans le premier cas, $p(X=4) = p(A_0) = 2/5$.
Dans le deuxième cas, $p(X=5) = p(A_1) = 8/15$.
Enfin, puisque tous les cas possibles sont X=4, X=5 ou X=6, on a : $p(X=4) + p(X=5) + p(X=6) = 1$.

On en déduit donc $p(X=6)$:
$p(X=6) = 1- p(X=4)- p(X=5) = 1-2/5-8/15 = 1/15$.
Il est souvent recommandé de faire un tableau récapitulatif.

x_i	4	5	6
$p(X=x_i)$	2/5	8/15	1/15

L'espérance mathématique de X est :
$E(X) = 4.p(X=4) + 5.p(X=5) + 6.p(X=6)$
$= 8/5 + 8/3 + 2/5$
$= 14/3$.

2° a_ Calculons $p(B_0/A_2)$.
A_2 est supposé réalisé, donc on a tiré les deux boules blanches présentes dans l'urne. Etant donné qu'on ne les remet pas dedans, la probabilité de ne pas tirer de boule blanche est de 1, puisqu'il n'y en a plus ! On a donc :
$p(B_0/A_2) = 1$
De plus, on a :
$p(B_0 \cap A_2) = p(B_0/A_2).\ p(A_2) = 1.(1/15) = 1/15$.

L'énoncé nous dit "calculer <u>de même</u>", donc nous devons chercher $p(B_0/A_1)$ et $p(B_0/A_0)$ avant de calculer $p(B_0 \cap A_1)$ et $p(B_0 \cap A_1)$.
Calculons $p(B_0/A_1)$:
nous avons tiré une boule de chaque couleur, donc, après le premier tirage, il y a 4 boules noires et une boule blanche dans l'urne (car on ne remet que les boules noires). Par conséquent, on a :

$$p(B_0/A_1) = \frac{\text{nombre de tirages permettant de tirer 0 boule blanche, donc 2 noires sur 4 disponibles}}{\text{nombre total de tirages (2 boules sur 5)}} = \frac{C_4^2}{C_5^2} = 3/5.$$

Calculons $p(B_0/A_0)$:
puisque les boules dans l'urne sont exactement les même en nombre et couleur que lors du premier tirage, on a : $p(B_0/A_0) = p(A_0) = 2/5$.
Calculons à présent $p(B_0 \cap A_1)$ et $p(B_0 \cap A_0)$:
$p(B_0 \cap A_1) = p(B_0/A_1).p(A_1) = (3/5).(8/15) = 8/25$.
$p(B_0 \cap A_0) = p(B_0/A_0).p(A_0) = (2/5).(2/5) = 4/25$.

Pour en déduire $p(B_0)$, il suffit de dire que les évènements $B_0 \cap A_0$, $B_0 \cap A_1$ et $B_0 \cap A_2$ sont deux à deux incompatibles, et donc :
$p(B_0) = p(B_0 \cap A_0) + p(B_0 \cap A_1) + p(B_0 \cap A_2) = 4/25 + 8/25 + 1/15 = 41/75$.
La probabilité de tirer aucune boule blanche, soit deux boules noires, est de 41/75.

b_ On cherche la probabilité de tirer deux boules blanches lors du second tirage. Il ne faut donc pas avoir tiré de boule blanche lors du premier tirage, et tirer les deux boules blanches ensuite. Il faut donc que l'événement A_0 soit réalisé. On obtient donc :
$p(B_2/A_0) = p(A_2)$ (puisque les deux tirages se font dans les mêmes conditions), et ainsi :
$p(B_2/A_2) = 1/15$.

De plus, l'événement B_2 ne peut se faire si l'événement A_0 ne s'est produit. En effet, si on a déjà tiré une ou deux boules blanches, on ne pourra en tirer deux lors du second tirage. Ainsi :
$p(B_2) = p(B_2 \cap A_0) = p(B_2/A_0).p(A_0) = (1/15).(2/5) = 2/75$
La probabilité de tirer deux boules blanches lors du second tirage est de 2/75.

Pour en déduire $p(B_1)$, disons que B_0, B_1 et B_2 forment une partition de l'univers (il ne peut se passer d'autres évènements que ceux-ci, comme par exemple tirer trois boules blanches…). Ainsi, on a :
$p(B_0) + p(B_1) + p(B_2) = 1$
Or, nous avons déjà calculé $p(B_0) = 41/75$, et $p(B_2) = 2/75$. On a donc :
$p(B_1) = 1-41/75-2/75 = 32/75$.
La probabilité de tirer une boule blanche lors du second tirage est de 32/75.

Ainsi s'achève l'ultime chapitre "COMBINATOIRE, PROBABILITES"…
Ce qu'il est essentiel de retenir est que dans les probabilités, la compréhension de la situation est aussi importante que le savoir acquis au fil de l'année. Les probabilités sont plus que de simples formules : il faut les comprendre, les saisir. Ainsi, vous devez connaître la signification des combinaisons, des arrangements, ainsi que les notions d'incompatibilité, d'indépendance…
Toutes les relations de probabilité conditionnelle, de loi de probabilité et autres doivent être maîtrisées.
En fin de compte, tout doit être su et surtout assimilé.

S'il existait des conseils "intelligents", je dirais qu'il serait préférable d'apprendre les cours du prof régulièrement, comme peu le font, mais c'est la meilleure méthode pour éviter de ramer à l'approche du bac. Il faut non seulement les apprendre, mais aussi les comprendre si vous voulez vous faciliter la vie (à vous de choisir…). Le résumé de cours que vous lisez n'a aucunement la prétention d'être un cours complet, mais tout ce qui est dedans (hormis le raisonnement par récurrence voire le pivot de Gauss) est essentiel : il est nécessaire de savoir ce qu'il contient, mais cela n'est probablement pas suffisant. Il conviendra largement à ceux qui désire un autre point de vue que celui du prof sur un sujet précis. De plus, je vous conseille énormément de revoir, avant de vous coucher (par exemple), pendant 5 à 10 minutes, un chapitre que vous avez déjà vu. Cela vous permet de vous rappeler des propriétés essentielles d'un chapitre sans vous casser la tête (et ça a très bien marché pour moi…).

Sur ce, je vous souhaite (comme probablement d'autres l'ont déjà fait) de réussir, ce que vous ferez aisément en compagnie de ces rappels de cours (je l'espère ☺).